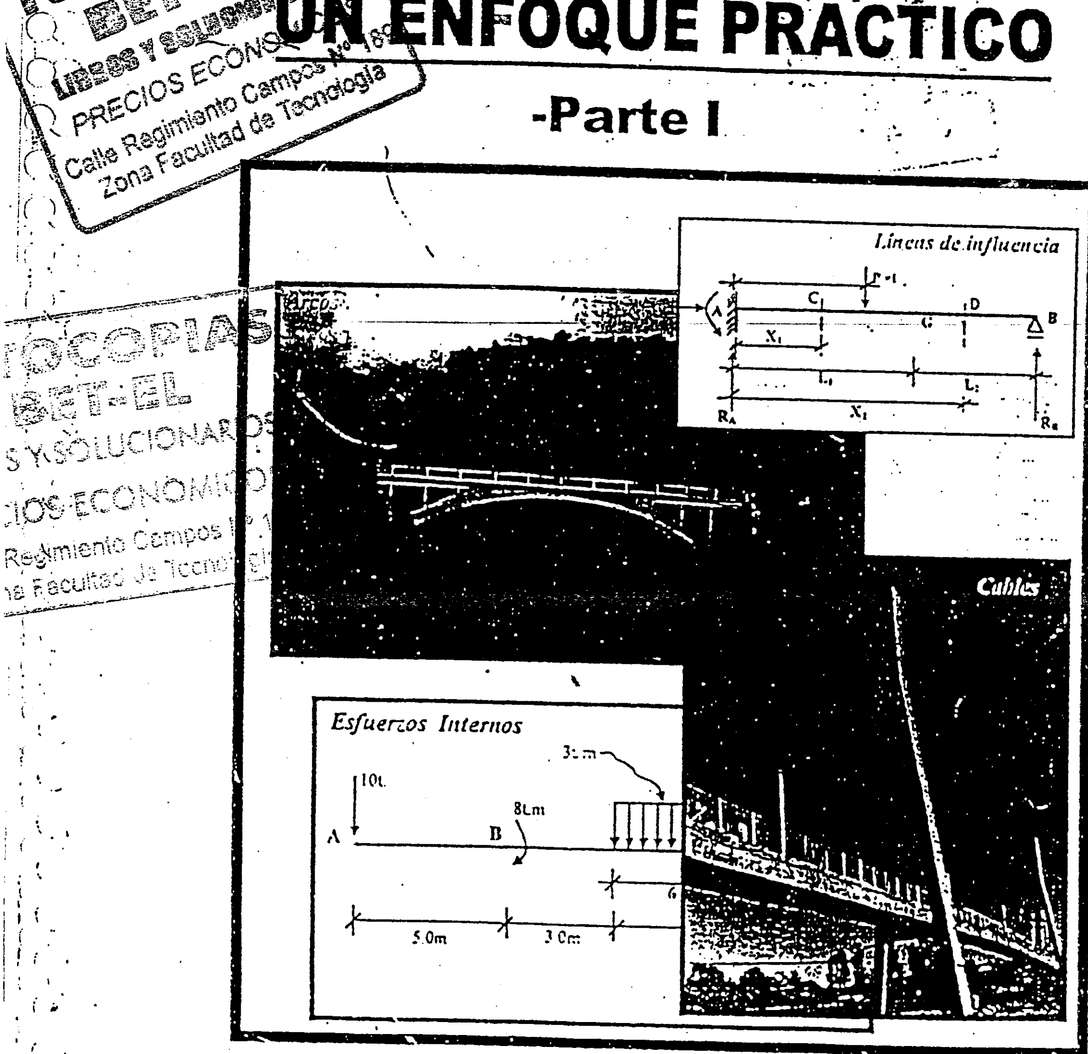
ANALISIS ESTRUCTURAL I

UN ENFOQUE PRACTICO

-Parte I



Félix Fuentes Lipez
Ingeniero Civil

DATOS PERSONALES

NOMBRE Y APELLIDO:..

DIRECCION:..

TELEFONO:..................................CELULAR:...............................

FACULTAD:.................................CARRERA:................................

CORREO:...

HORARIO

Hora	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado

de áreas y curvas planas, poniendo énfasis de que el estudiante no requiere de conocimientos superiores de las matemáticas.

Igualmente, se proporcionará un "procedimiento para el análisis " al final de muchas secciones del texto con el objeto de proporcionar al estudiante o al usuario una revisión o resumen del material, así como un método lógico y ordenado para seguir en el momento de aplicar la teoría. Como en las ediciones previas, los problemas de ejemplo se resuelven con el método anteriormente descrito a fin de clasificar su aplicación numérica. Se entiende sin embargo, que una vez que el estudiante tenga un amplio conocimiento y dominio de los temas, además tenga un juicio y el auto confianza suficiente, el estudiante podrá desarrollar sus sistemas y procedimientos para resolver problemas que están insertadas al final del texto; Estos son problemas propuestos en pruebas parciales, finales y de segunda instancia.

Finalmente, deseo hacer conocer que la mayor parte de los problemas resueltos y propuestos en este trabajo, muestran situaciones reales mostradas en la práctica de la ingeniería civil; se espera que este realismo estimule el interés de los estudiantes y usuarios, además proporcione la habilidad de reducir cualesquiera de tales problemas desde su aplicación física hasta el modelo estructural o representación esquemática sobre los cuales se aplican los principios fundamentales de la estática.

Es así que con el advenimiento de las calculadoras científicas y las computadoras de última generación, los problemas de la estática y sobre todo la resolución de las estructuras son sencillas, no debemos olvidar que, el planteamiento, análisis y diseño de cualquier parte estructural requiere de la comprensión básica de los principios de la ingeniería civil. Al escribir este pequeño trabajo me acordé de Manuel, Agustín, Lucio, Máx., Osvaldo y Teresa compañeros infatigables de estudios superiores, con quienes he

compartido los momentos más felices de mi vida universitaria. A lo largo de los años mucha gente ha cooperado en su desarrollo y quisiera agradecer a cada uno de ellos por sus valiosas sugerencias y comentarios.

Un agradecimiento muy especial a los estudiantes H. Abraham Chambilla y Lugo Arnoldy A. que sin la ayuda de ellos no hubiera sido posible la conclusión de este trabajo manuscrito.

Y un eterno agradecimiento a la familia Fuentes Uño que es la parte principal de mi vida, que sin el apoyo de ellos no hubiera sido alcanzado el logro de este humilde trabajo.

Concluimos manifestando:

" Es mejor hacer algo y ser criticado,
que no hacer y no tener nada para ser
criticado "

El autor

Tarija 2 de Abril del 2001

AL ESTUDIANTE

Con la esperanza de que este trabajo sencillo estimule un interés en la Ingeniería Civil, y proporcionar una guía aceptable para un planteamiento, análisis y resolución de problemas ingenieriles.

INDICE

IV.- RESOLUCIÓN ESTRUCTURAS PAG.46

V.- CERCHAS O VIGAS TRIANGULADAS PAG.91

1

INTRODUCCION BASICA AL ANALISIS ESTRUCTURAL I

DEFINICIONES:-

1.1 MECANICA:- Se define como la rama de las ciencias físicas que estudia el estado de reposo o movimiento de cuerpos que estan sujetos a la acción de fuerzas esta rama se divide en:

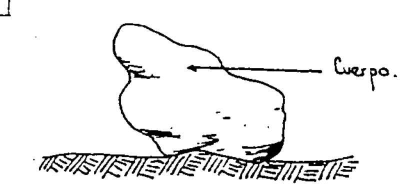
MECANICA
- a):- Mecánica de cuerpos rígidos
- b):- Mecánica de cuerpos deformables
- c):- Mecánica de fluidos

En está materia sólamente se estudiará la mecánica de cuerpos rígidos ya que esta constituye la base apropiada para el diseño y análisis de todo tipo de estructuras de la ingeniería, además la mecánica de cuerpos rígidos se divide en dos:

Mecanica del Cuerpo rígido
- a):- ESTATICA
- b):- DINAMICA

La estática estudia el equilibrio de los cuerpos, esto es, aquellos que se encuentran en reposo, o en movimiento con velocidad constante. Mientras que la dinámica estudia el movimiento acelerado de los cuerpos.

Cuerpo rígido.



1.2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES:- Antes de empezar nuestro estudio de la mecánica del cuerpo rígido, es importante conocer el significado de ciertos conceptos importantes.

1.3 CANTIDADES BASICAS:- las cuatro cantidades siguientes se utilizan en la mecánica del cuerpo rígido.

A):- Longitud:- Es necesaria para ubicar la posición de un punto en el espacio y de esta forma describir el tamaño de un sistema fijo y físico. Una vez que se define una unidad -

de longitud estandar, puede definirse cuantitativamente distancias y propiedades geométricas de una figura, cuerpo, etc. Como múltiplos de esta.

Ejemplo.-

4m

3m.

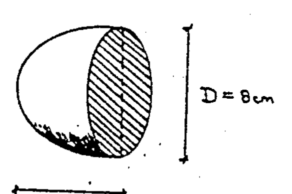


fig 1.1

B).- Tiempo.- El tiempo se concibe como una sucesión de eventos aunque los principios de la estática son independientes del tiempo, esta cantidad definitivamente juega un papel importante en la dinámica

C).- Masa.- La masa es una propiedad de la materia por la cual podemos comparar la acción de un cuerpo con la de otro esta propiedad se manifiesta como una atracción gravitacional entre dos cuerpos.

D).- Fuerza.- En general, la fuerza es considerada como un "tirón" o "jalón" ejercida por un cuerpo sobre otro.

Ejemplo.-

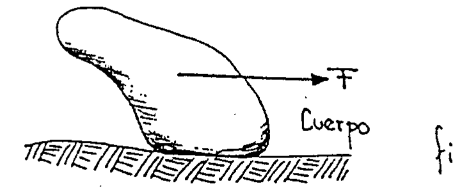


fig. 1,2

1,4 IDEALIZACIONES.- Los modelos o idealizaciones se utilizan en mecánica con la finalidad de simplificar la aplicación de la teoría. Se definirá algunas de las idealizaciones más importantes. Otros modelos que se necesiten serán estudiados en su oportunidad.

A).- Partícula.- Una partícula posee masa pero de tamaño poco significativo. Por ejemplo, el tamaño de la tierra es insignificante comparado con el tamaño del Universo. (POR LO TANTO SE CONVIERTE EN PARTÍCULA). Cuando un cuerpo se idealiza como partícula, en los principios de la mecánica se significan de manera importante debido

a que la geometría del cuerpo no se considera para el análisis del problema.

B).- Cuerpo rígido.- Un cuerpo rígido puede ser considerado como un conjunto formado por un gran número de partículas que permanecen separadas entre sí por una distancia fija antes y despues de aplicar la carga.

C).- Fuerza Concentrada.- La fuerza concentrada representa el efecto de una carga la cual se supone que actua en algún punto de un cuerpo.

1.5 LAS TRES LEYES DE NEWTON.- El tema de la mecánica del cuerpo rígido se encuentra basado en las tres leyes del movimiento de Newton los cuales pueden definirse brevemente en la siguiente forma.

PRIMERA LEY.- Una partícula que originalmente se encuentra en reposo, o moviendose en línea recta con una velocidad constante, permanecerá en este estado siempre y cuando una "fuerza extraña" no actua sobre ésta.

SEGUNDA LEY.- Una partícula sobre la cuál actúa una "fuerza extraña" F experimenta una aceleración "a" que poseé la misma dirección que la fuerza y una magnitud que es directamente proporcional a la fuerza. Esta ley se expresa matemáticamente como:

$$F = m \cdot a$$

TERCERA LEY.- Las fuerzas de acción y reacción entre dos partículas son iguales en intensidad, opuestos en sentido y son colineales.

1.6 PESO.- Cualquier par de partículas o cuerpos tienen una fuerza de atracción mutua actuando entre ellas. En el caso de una partícula ubicada en o cerca de la superficie de la tierra. La unica fuerza gravitacional que posee una magnitud medible es aquella entre la tierra y la partícula. En consecuencia está es la única fuerza llamada "peso" que sera objeto de estudio en la mecánica.

Por lo tanto podemos expresarla como:

$$W = m \cdot g$$

Donde: W = Peso
m = masa
$g = 9{,}80665 \ m/s^2$

1.7 UNIDADES DE MEDICION: los cuatro cantidades básicas longitud, tiempo, masa y fuerza no son independientes una de la otra estos se encuentran relacionados por medio de la segunda ley de Newton.

$$F = m \cdot a$$

UNIDADES S.I. El sistema internacional de unidades, denominado S.I. del frances " Systeme International d' unites " es una version moderna del sistema métrico que ha recibido reconocimiento internacional en este sistema se toma.

Longitud	metro	(m)
tiempo	Segundo	(s)
masa	Kilogramo	(Kg)
Fuerza	Newton	(N)

La fuerza derivada de los tres unidades base se llama "N" (Newton).

El punto estandar para la medición de (g) es el nivel del mar y a una latitud de 45° (punto standar). Por lo tanto en este punto $g = 9{,}80665 \ m/s^2$

$$W = m \cdot g \qquad Si: m = 1Kg.$$

$$\Rightarrow 1{,}0 * 9{,}80665 \simeq 9{,}80665 \ [N]$$

$$\boxed{W = 9{,}81 \ [N]}$$

Entre otras unidades se tiene el sistema ingles:

en este sistema.

Longitud	pies	(ft)
tiempo	Segundo	(s)
Fuerza	libras	(lb)

la unidad de masa se deriva de $F = m \cdot a$ llamada "slug" para este valor $g = 32{,}179 \ ft/s^2$.

Si aplicamos $W = m \cdot g \implies m = \frac{W}{g}$

Si $W = 32{,}2 \ lb$

$$m = \frac{32{,}2}{32{,}2} = 1 \ slug$$

__Nota:__ también existen otros como el M.K.S. Cgs. Sistema técnico etc.

FUERZAS:

1.8 INTRODUCCION:

En el pasado los ingenieros diseñaron catapultas para lanzar piedras, murallas para resistir; en la actualidad dentro de la rama de la ingeniería civil se diseñan dispositivos para ejercer y controlar fuerzas de estos diseños se tienen los cilindros hidráulicos, motores de reacción para ejercer fuerzas, martillos neumáticos para incar pilotes, además se diseñan ciertas estructuras para resistirlas, etc.

El primer paso para entender cómo trabajar con fuerzas será aprender a determinar estas fuerzas que actuan sobre cuerpos en equilibrio.

En capítulos posteriores se representará mediante vectores y usar la suma vectorial. en el presente acápite se analizará con mejor detalle las fuerzas y se presentará dos de los conceptos más importantes de la mecánica; el equilibrio y el diagrama de cuerpo libre para identificar las fuerzas que actuan sobre los cuerpos libres, y, se usará el equilibrio para determinar fuerzas desconocidas.

El concepto de fuerza debe constituirse de uso familiar en el desarrollo de los temas posteriores, como se evidencia con palabras de uso diario como (Empujar, jalar, elevar, etc.) en la ingeniería se tratan muchos tipos de fuerza con un gran intervalo de magnitudes, por lo q' es nesesario familiarizarse con los términos básicos usados especialmente en estructuras.

1.9 FUERZAS EXTERNAS E INTERNAS:

Se dice que un cuerpo esta sometido a una "FUERZA EXTERNA" si está es ejercida por un cuerpo diferente. Cuando una parte cualquiera de un cuerpo esta sometida a una fuerza por otra parte del mismo cuerpo, esta sometida a una" fuerza INTERNA" así por ejemplo. suponga que el cuerpo es usted cuando esta de pie, el piso es otro cuerpo que ofrece cierta resistencia igual al peso suyo.

1.10 UNIDADES DE FUERZA:

los unidades en el sistema S.I. es el newton (N)

$$1\,N \text{ equivale a } 1\,Kg\text{-}m/s^2$$

también es frecuente usar los múltiplos como el Kilo Newton, Mega Newton, etc (KN, MN) además, es frecuente usar otros sistemas de unidades.

Sistema Ingles —— Libra

1 libra = 4,448 Newtons

Sistema técnico — Kg. Fuerza

1.11 DEFINICION:- Una fuerza se define como un efecto de un cuerpo físico sobre otro cuerpo. Para examinar este concepto es necesario definir primero el significado del término "Cuerpo Físico".

Un cuerpo físico es un cuerpo que esta compuesto de materia y que tiene un volúmen que no es cero, estas a su vez pueden ser rígidas y deformables, los mismos se consideran más adelante.

A partir de la fuerza definida puede concluirse que "Un sistema debe contener por lo menos dos cuerpos si va a producirse una fuerza.

Las fuerzas pueden dividirse con amplitud en dos clases, llamadas fuerzas de cuerpo y fuerzas de Superficie.

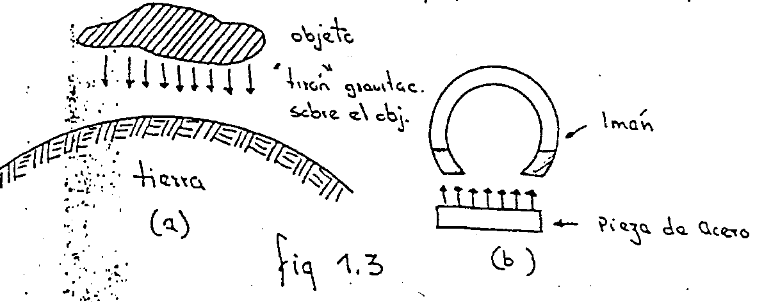


fig 1.3

Así por ejemplo en la figura (a), se tiene la atracción universal (Gravitacional), que son atraidas por la tierra a un objeto llamado peso propio, mientras que la figura (b) debido a las fuerzas magnéticas de un imán es atraida un objeto de acero.

Ejemplos:- transformación de unidades de un sistema a otro.

1.1: Convertir la cantidad de 400 lbs. a las unidades apropiadas del sistema S.I.

Solución:- Segun tablas $1\,lb = 4,4482\,[N]$

$$\frac{400\,lb}{x} = \frac{1\,lb}{4,4482\,[N]}$$

$$x = \frac{400\,lb \cdot 4,4482\,N}{1\,lb} = 1779,28\ [N]$$

$$\boxed{x = 1,78\ KN}$$

1,2 Calcule la expresión y representa con el prefijo apropiado en el sistema S.I.

$$(50\ mN)\cdot(8\ GN)$$

Donde: mN = mili Newtons
GN = Giga Newtons

$$(50\ mN)(8\ GN) = [50\cdot10^{-3}\ N][8\cdot10^{9}\ N]$$

$$= 400\cdot10^{6}\ [N^2]$$

$$= 400\cdot10^{6}\ N^2 \frac{1\ KN \cdot 1\ KN}{10^3 N \cdot 10^3 N}$$

$$\boxed{50\ [mN]\cdot 8\ [GN] = 400\ [KN]^2}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS:-

1,1.- ¿Cuál es el peso en Newtons de un objeto q' posee una masa de:

a) 8Kg b) 0,04 gr c) 760 μg

1,2.- la madera tiene una densidad de 4,70 slugs/pie^3. ¿cuál es su densidad expresada en unidades SI?

1.3.- Represente cada una de las siguientes combinaciones de unidades en forma correcta, utilizando el prefijo apropiado del sistema S.I.

a) $m/\mu \cdot s$; b) $\mu \cdot Km$; c) Kg/mg ; d) $Km \cdot \mu N$

1.4.- Si un hombre pesa 155 lb en la tierra exprese:

a) Su masa en slugs
b) Su masa en Kg
c) Su Peso en N

Si el hombre estuviera en la luna en donde:

$g_m = 5,30$ pies/s^2, determine su peso en libras y su masa en Kgs.

1.5.- Determine la masa en Kg. de un objeto que tiene un peso de:

a) 20 mN
b) 150 KN
c) 60 MN

Expresar cada una utilizando el prefijo apropiado.

EQUILIBRIO DE UNA PARTICULA

2

SISTEMA DE FUERZAS :

Dentro de un sistema general de fuerzas que actuan sobre un cuerpo pueden presentarse dos clases

sistema de fuerzas
- a).- Coplanares
- b).- No Coplanares
- c).- Paralelas

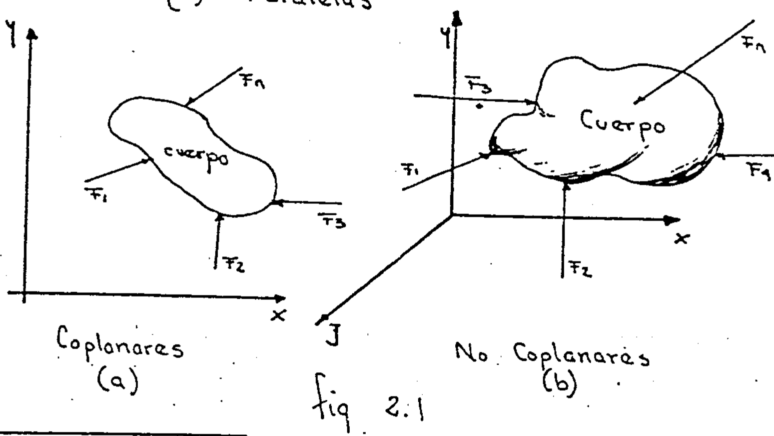


fig 2.1

2.1 FUERZAS COPLANARES.-

Se denominan sistema de Fuerzas Coplanares aquel conjunto (sistema) de fuerzas que actuan en el plano x.y, éstas pueden ser descompuestas en sus componentes Fx y Fy respectivamente (fig 2,1 a)

2.2 FUERZAS NO COPLANARES.-

Se denomina sistema de Fuerzas No coplanares al conjunto de fuerzas que actuan en el espacio (tridimensional) estas pueden ser descompuestas en las componentes Fx, Fy y Fz respectivamente (fig 2,1 b)

A su vez las fuerzas coplanarias se clasifican en:

Fuerzas coplanarias
- a).- Concurrentes
- b).- No concurrentes

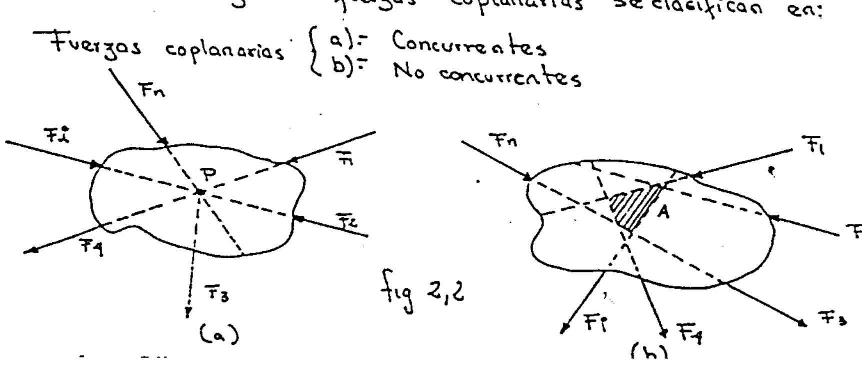


fig 2,2

Se denominan Fuerzas concurrentes coplanarias a todo sistema, cuyas líneas de acción se cortan en un punto (punto P fig 2,2 a).

Mientras que, se denominan fuerzas No concurrentes coplanarias al sistema cuyas líneas de acción no se cortan en un punto, sino, en un Area determinado (fig 2,2 b area A).

2.3 FUERZAS COPLANARIAS PARALELAS: Como caso particular de las fuerzas concurrentes tenemos los fuerzas paralelas cuyas rectas de acción se cortan en el infinito.

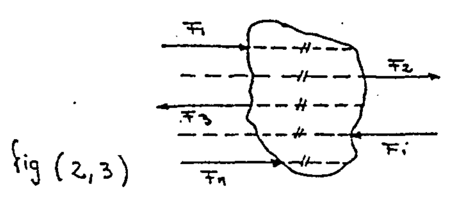
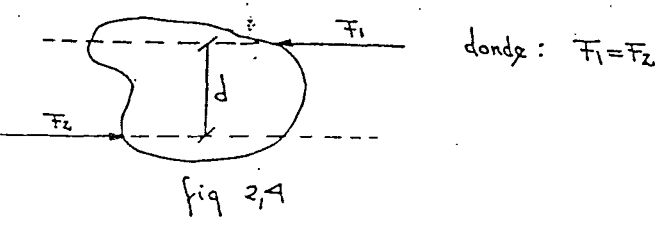


fig (2,3)

Sistema de fuerzas coplanarios en paralelo (No se intersectan)

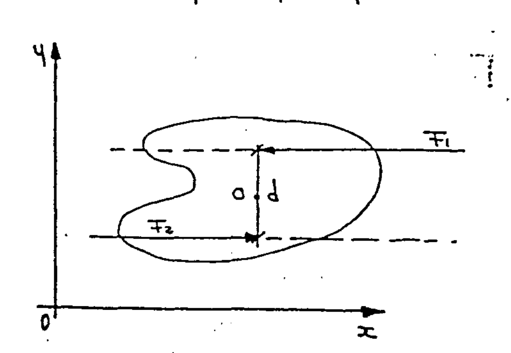
2.4 SISTEMA PAR: Es un caso particular de un sistema de fuerzas concurrentes paralelas, con la característica de que esta conformado por un "par" de fuerzas de sentido contrario e igual magnitud, separadas por una distancia "d"



donde: $F_1 = F_2$

fig 2,4

Por otro lado segun la fuerza par se tiene



Haciendo (Suma) de momentos en O (punto medio de d) se tiene:

Convenio de signos +)

$$M_o = -F_1 \cdot \frac{d}{2} - F_2 \frac{d}{2} = -\frac{d}{2}(F_1 + F_2)$$

pero $F_1 = F_2 = F$

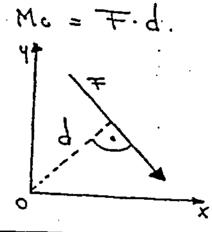
Condición del "PAE" se tiene:

$$M_o = -\frac{d}{2}(2F)$$

$$M_o = -F \cdot d$$

lo que nos dice "El momento producido por una fuerza F con respecto a un punto (o) que no pertenece a su recta de acción, es igual al producto de dicha fuerza por su distancia"

$$M_o = F \cdot d.$$



2.5 PARTES DE UNA FUERZA.- Una fuerza en general está identificada mediante las siguientes nominaciones:

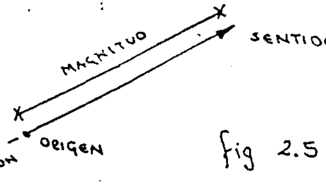


fig 2.5

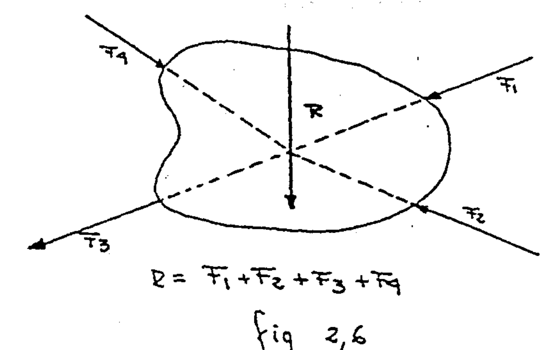
a) <u>Recta de acción</u>.- Es la recta imaginaria, a travez de la cual puede deslizarse la Fuerza.

b) <u>Origen</u>.- Es el punto de acción, punto en la cual actua la fuerza

c) <u>Sentido</u>.- Indica la direccion de la fuerza.

d) <u>Magnitud</u>.- Es la cantidad (tamaño) del vector fuerza que actua sobre algun cuerpo

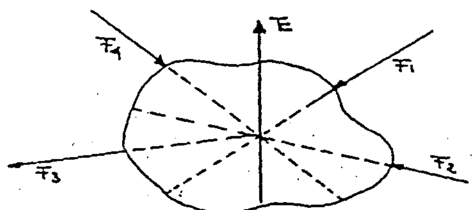
2.6 RESULTANTE DE UN SISTEMA DE FUERZAS.- la resultante de un sistema de fuerzas es la única fuerza R que reemplaza a todo un sistema.



$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

fig 2,6

2.7 EQUILIBRANTE DE UN SISTEMA DE FUERZAS.- Es otra fuerza E con sentido contrario a la resultante y de igual magnitud, actua sobre la misma recta de acción que la resultante.



Para encontrar la resultante de un sistema de fuerzas existen varios métodos

Método Gráfico } Paralelogramo de fuerzas; triángulo de fuerzas

Método Analítico } Mediante descomposición de fuerzas, bajo un sistema de ejes cartesianos

2.8 DESCOMPOSICION DE FUERZAS.- Muy a menudo en la estática (mecánica) es nesesario descomponer en 2 direcciones dadas.

1°) <u>Descomposición en sus coordenadas rectangulares.-</u>

Como en una estructura plana la línea de acción de todas las fuerzas estan en un plano, cada una de estas Fuerzas es posible descomponer en dos direcciones rectangulares

Fx y Fy Con respecto a los ejes cartesianos e inclusive puede tomar cualquier dirección.

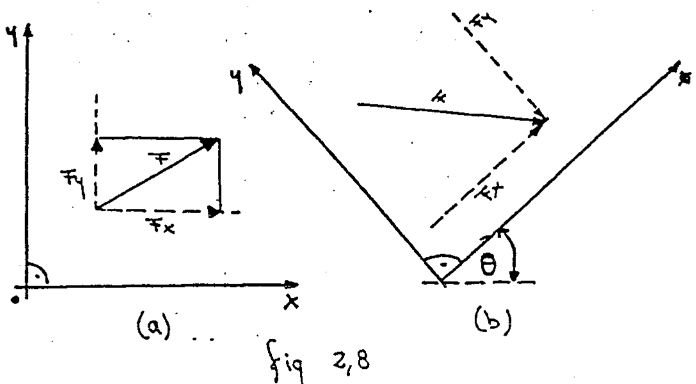


fig 2,8

Donde Fx y Fy, Se llaman componentes rectangulares o cartesianos - además es conveniente elegir los ejes cartesianos, uno horizontal y otro vertical de tal manera que forme ángulo recto en el origen.

2°) <u>Descomposición en dos dimensiones dadas</u>.- En algunas ocasiones es nesesario descomponer no en sus componentes rectangulares, sino en base a otra dirección dada.

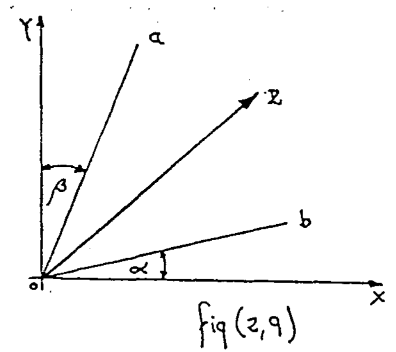


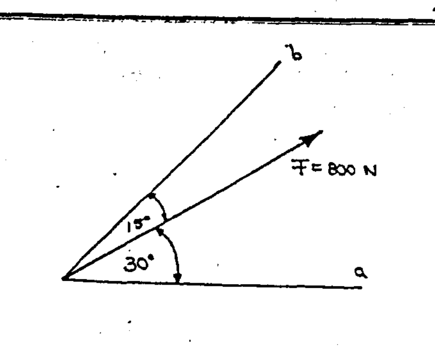
fig (2,9)

Por ejemplo se desea descomponer la fuerza R en 2 direcciones "a" y "b"

Ejemplo Numérico.-

2,1.- Determine las dos componentes de la fuerza F a lo largo de las líneas Oa y Ob, tales que $F = F_a + F_b$

Por el método Analítico.



F = 800 N, β, Fb, 30°, θ, 45°, o, Fa

$$\theta = 180° - 45° = 135°$$

$$\frac{\operatorname{Sen}\theta}{800} = \frac{\operatorname{sen} 30°}{Fb}$$

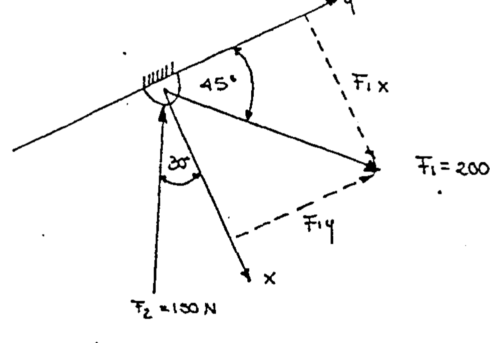
$$Fb = \frac{800 \cdot \operatorname{sen} 30°}{\operatorname{sen} 135°} = \boxed{565{,}69\,[N]}$$

$$180° - 30° - 135° - \beta = 0$$

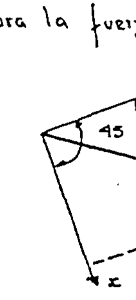
$$\beta = 15°$$

$$\frac{\operatorname{Sen} 15°}{Fa} = \frac{\operatorname{Sen} 135°}{800} \Rightarrow Fa = \frac{207{,}055}{\operatorname{Sen} 135} = \boxed{292{,}82\,[N]}$$

2,2.- Determine las componentes x y y de las fuerzas F_1 y F_2



Para la fuerza $F_1 = 200$ N se tiene



$$\operatorname{Sen} 45 = \frac{F_1x}{200} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_1x = 200 \cdot \operatorname{Sen} 45$$

$$\boxed{F_1x = 141{,}42\ N}$$

$$\cos 45 = \frac{F_{1y}}{200} \Rightarrow F_{1y} = 200 \cos 45°$$

$$\boxed{F_{1y} = 141{,}42\ N}$$

- Para la fuerza $F_2 = 150\ N$; se tiene

$$\operatorname{Sen} 30° = \frac{F_{2y}}{150} = \boxed{F_{2y} = 75\ N}$$

$$\operatorname{Cos} 30° = \frac{F_{2x}}{150} = \boxed{F_{2x} = 129{,}9\ N}$$

2,3.- Demostrar sobre la desplazabilidad de una Fuerza (F) sobre su recta de acción

1°) Se descompone la fuerza F en sus componentes rectangulares Fx y Fy

$$F_x = F \cos \alpha \qquad F_y = F \operatorname{sen} \alpha$$

Haciendo Momentos con respecto al punto O (centro de coordenadas $\overline{x,y}$) se tiene

Convenio de Signos $\xrightarrow{F_x}$ + $\uparrow F_y$ + $+)$ M

tenemos

$$M_o = F_y \cdot a - F_x \cdot b$$

$$M_o = a \cdot F \cdot \operatorname{Sen} \alpha - b F \cos \alpha = F(a \operatorname{sen} \alpha - b \cos \alpha)$$

2do) Suponemos que la Fuerza (F) se desplaza hasta el punto A cuya descomposición Fx y Fy se tiene.

Además según la figura:

$$tg\,\alpha = \frac{b}{c+a}$$

$$c+a = \frac{b}{tg\,\alpha} \implies \boxed{c = \frac{b}{tg\alpha} - a} \quad (1)$$ distancia de la Fuerza Fy con respecto al punto "O"

$$M_o = -F_y \cdot c = -F\,Sen\alpha\left(\frac{b}{tg\alpha} - a\right)$$

$$M_o = -F\,Sen\alpha\left(\frac{b\cos\alpha}{Sen\alpha} - a\right)$$

$$M_o = -F\,Sen\alpha\left(\frac{b\cos\alpha - a\,sen\alpha}{Sen\alpha}\right)$$

$$\boxed{M_o = F\,(a\,sen\,\alpha - b\cos\alpha)} \quad (2)$$

Según teorema de:

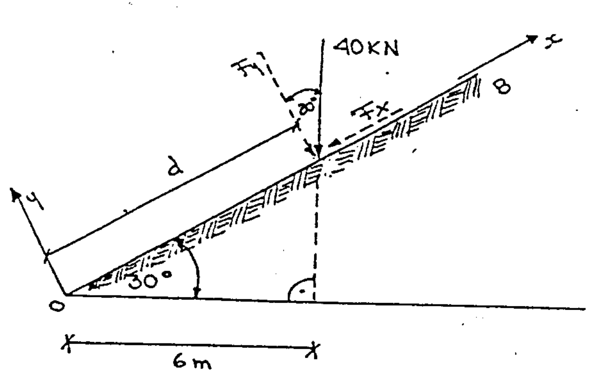
"Dos cantidades iguales a una tercera, son iguales entre si"

$$F\,(a\,Sen\,\alpha - b\cos\alpha) = \text{de la ecuacion (1)}$$

$$F\,(a\,Sen\alpha - b\cos\alpha) = \text{de la ecuacion (2)}$$

$0 = 0$ que es una identidad por lo tanto queda demostrado la desplazabilidad de una fuerza sobre su recta de acción.

2,4 a) Descomponer la Fuerza F en sus componentes Fx y Fy según fig.
b) Encontrar el momento producido de dicha Fuerza con respecto al punto O



a) Se tomara un eje con referencia al plano inclinado 0-B

el ángulo de 30° se repite, segun indica la figura por "angulos de lados perpendiculares entre si"

$$F_x = 40 \operatorname{Sen} \alpha \quad ; \quad F_y = 40 \cos \alpha$$
$$F_x = 40 \qquad F_y = 40\cdot$$

b) Para encontrar, el momento que produce la Fuerza F con respecto al punto 0, hay 2 posibilidades

Siempre aplicando el concepto de $M_0 = F \cdot d$.

1: $\boxed{M_0 = 40 \cdot 6 = 240 \text{ KN} \cdot \text{m}}$

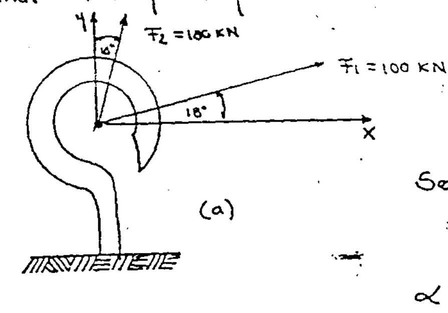
2- $M_0 = 40 \cdot \cos\alpha \cdot d$ pero $d = \dfrac{6}{\cos 30}$

$$M_0 = 40 \cdot \cos 30 \cdot \frac{6}{\cos 30}$$

$$\boxed{M_0 = 240 \text{ KN} \cdot \text{m}}$$

lo cual demuestra que los dos posibilidades nos llevara a un mismo resultado.

2,5- El gancho de la figura, se encuentra sujeto a dos fuerzas F_1 y F_2 determinar la magnitud y dirección de la resultante.



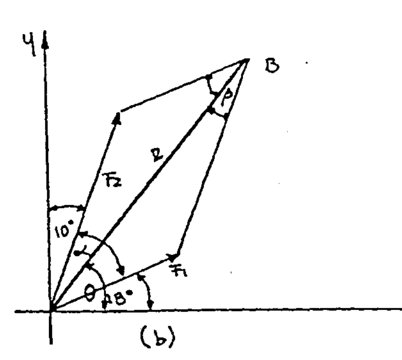
Según la regla del paralelogramo se tiene

$$\alpha = 90 - 18 - 10 = 62°$$

$\alpha = \beta$ por paralelismo

Σ ángulos internos de un cuadrilátero es 360°

$$\gamma = \frac{360 - 2 \cdot 62}{2} = 118°$$



Si nos fijamos la figura (b) anterior tenemos el triángulo obtusángulo OAB

Por la ley de los cosenos

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\gamma \quad \text{Se tiene}$$

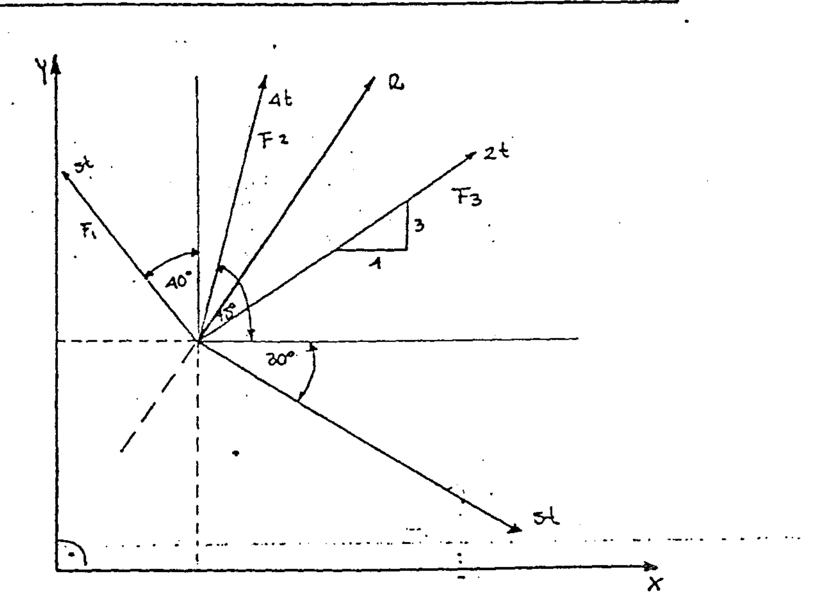
$$R = \sqrt{100^2 + 180^2 - 2 \cdot 100 \cdot 180 \cdot \cos 118}$$

$$R = 243,52 \text{ KN}$$

El angulo (θ) se encuentra aplicando la ley de los senos

$$\frac{F_2}{\operatorname{Sen}\theta} = \frac{R}{\operatorname{Sen}\gamma} \Rightarrow \operatorname{Sen}\theta = F_2 \cdot \operatorname{Sen}\gamma / R$$

2.9 RESULTANTE DE FUERZAS COPLANARIAS CONCURRENTES:-



la intersección de las rectas de acción se cortan en un punto P(3,4); el criterio fundamental para encontrar la resultante (R) es descomponer en sus componentes F_{ix}, F_{iy} de cada uno de las fuerzas

2.10 CONVENIO DE SIGNOS:-

De acuerdo a la conveniencia se adoptara el siguiente convenio de signos.

$F_{ix} \xrightarrow[+]{}$; $+\uparrow F_{iy}$; $+\circlearrowright M_o$

Por lo tanto descomponiendo cada una de las fuerzas F_i en sus componentes F_{ix} ; F_{iy} se tiene:

Para F_{1x}			Para F_{1y}		
$F_{1x} =$	$-5 \cdot \text{Sen } 40°$	$= -3{,}214$	$F_{1y} =$	$5 \cdot \text{Cos } 40°$	$= 3{,}830$
$F_{2x} =$	$4 \cdot \text{Cos } 75°$	$= 1{,}035$	$F_{2y} =$	$4 \cdot \text{Sen } 75°$	$= 3{,}864$
$F_{3x} =$	$2 \cdot 4/5$	$= 1{,}600$	$F_{3y} =$	$2 \cdot 3/5$	$= 1{,}200$
$F_{4x} =$	$5 \cdot \text{Cos } 30°$	$= 4{,}330$	$F_{4y} =$	$-5 \cdot \text{Sen } 30°$	$= -2{,}500$
	ΣF_{ix}	$3{,}751$		ΣF_{iy}	$6{,}394$

Si tenemos q.

Entonces:

$$R^2 = (\Sigma F_{ix})^2 + (\Sigma F_{iy})^2$$

$$R = \sqrt{(\Sigma F_{ix})^2 + (\Sigma F_{iy})^2}$$

$$R = \sqrt{(3{,}751)^2 + (6{,}394)^2} = 7{,}413 \text{ t}$$

Magnitud: $R = 7{,}413 \text{t.}$

Angulo (θ) q. forma con la horizontal

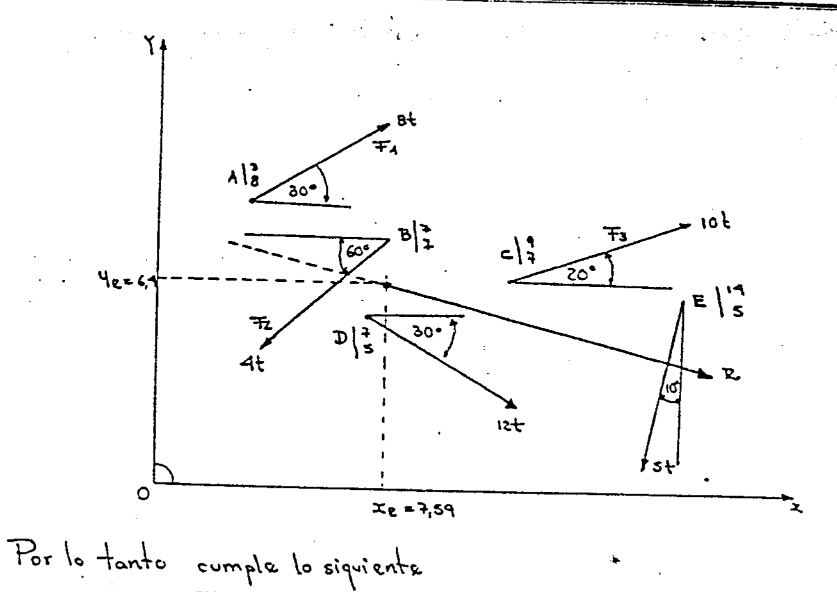
$$tg(\theta) = \frac{\Sigma F_{iy}}{\Sigma F_{ix}} = \frac{6{,}394}{3{,}751} = 1{,}7046$$

$$\theta = 59{,}59°$$

Punto de aplicación.- Como se trata de fuerzas concurrentes la resultante será otra fuerza q. concurre al mismo punto de aplicación (Por lo tanto pasa por el punto P) del gráfico

2.11. RESULTANTE DE FUERZAS COPLANARIAS NO CONCURRENTES.- Si, se tiene p.e el siguiente sistema de fuerzas F_i q. son coplanarios pero no concurrentes Entonces se tiene.

En la figura siguiente se tienen varias fuerzas $F_1, F_2, F_3, \ldots F_4 \ldots F_i$, cada una de estas fuerzas tienen su componente $F_{1x}, F_{2x}, F_{3x} \ldots F_{4x} \ldots F_{ix}$ además $F_{1y}, F_{2y}, F_{3y} \ldots F_{4y} \ldots F_{iy}$



Por lo tanto cumple lo siguiente

$$R^2 = (\Sigma F_{ix})^2 + (\Sigma F_{iy})^2$$

y

$$\theta = \text{Arctg}\left(\frac{\Sigma F_{iY}}{\Sigma F_{iX}}\right)$$

Falta por calcular el punto de aplicación o sea, el centro donde actúa la resultante:

Por lo tanto:

Para F_{ix}		Para F_{iY}	
$F_{1x} = 8\cos 30° =$	6,928	$F_{1Y} = 8\,\text{Sen}\,30° =$	4,000
$F_{2x} = -4\cos 60° =$	−2,000	$F_{2Y} = -4\,\text{Sen}\,60° =$	−3,464
$F_{3x} = 10\cos 20° =$	9,397	$F_{3Y} = 10\,\text{Sen}\,20° =$	3,420
$F_{4x} = 12\cos 30° =$	10,392	$F_{4Y} = -12\,\text{Sen}\,30° =$	−6,000
$F_{5x} = -5\,\text{sen}\,10° =$	−0,868	$F_{5Y} = -5\cos 10° =$	−4,924
$\Sigma F_{ix} =$	23,849	$\Sigma F_{iY} =$	−6,968

$$R^2 = (23,849)^2 + (-6,968)^2$$

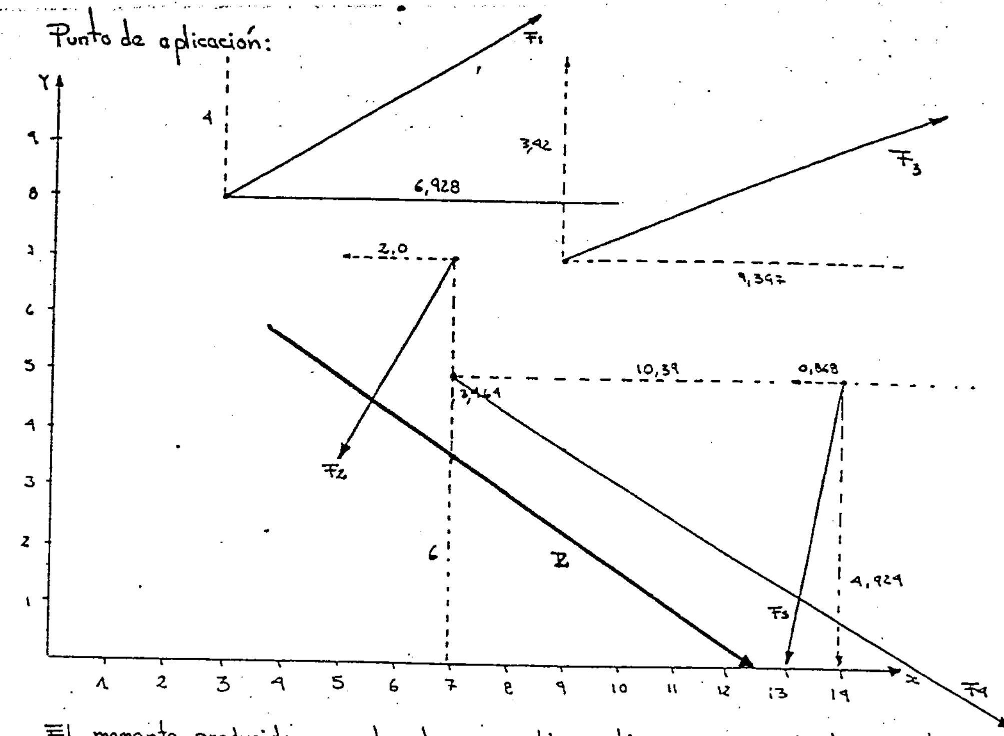
$$R = \sqrt{617,328} = 24,84\ t$$

Dirección (Recta de acción)

$$\theta = \text{Arctg}\left(\frac{-6,968}{23,849}\right)$$

$$\theta = -16,3°$$

Punto de aplicación:



El momento producido por las fuerzas activas tiene q' ser igual al momento producido por la resultante

$$X * R \text{ Sen } 16,3^\circ = \underbrace{-4\cdot 3}_{-12} + \underbrace{6,928\cdot 8}_{55,424} - \underbrace{2\cdot 7}_{-14} + \underbrace{3,464\cdot 7}_{24,248} - \underbrace{3,42\cdot 9}_{-30,18} +$$

$$\underbrace{9,397\cdot 7}_{65,779} + \underbrace{10,392\cdot 5}_{51,96} + \underbrace{6\cdot 7}_{42} - \underbrace{0,868\cdot 5}_{-4,34} + \underbrace{4,924\cdot 14}_{68,936} =$$

$$X * R \text{ Sen } 16,3^\circ = 308,347 - 61,12 = 247,227$$

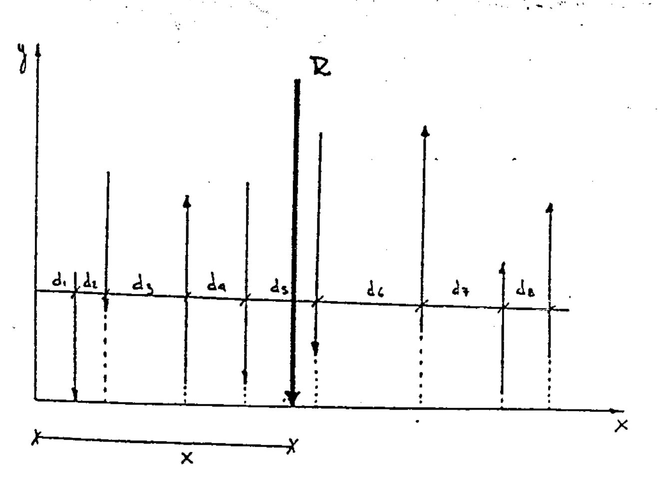
Si: $R = 24,84 \Rightarrow$ $X = \dfrac{247,227}{6,9718} = 35,46\ [u] \Rightarrow$ $\boxed{X = 35,46\ (u)}$

2.12. RESULTANTE DE FUERZAS PARALELAS.- No es sino un caso particular de las fuerzas coplanarias no concurrentes. Es similar al caso de las fuerzas concurrentes la única situación es que se cortan en el infinito.

Donde: $\Sigma F_{ix} = 0$

$\Sigma F_{iy} \neq 0$

tenemos:



$$R = \sqrt{\cancel{(\Sigma F_{ix})^2}_{0} + (\Sigma F_{iy})^2} = \cancel{\sqrt{}}(\Sigma F_{iy})^2$$

$$R = \Sigma F_{iY}$$

Donde el ángulo es igual a:

$$tg\,\theta = \frac{\Sigma F_{iy}}{\Sigma F_{ix}} = \frac{\Sigma F_{iy}}{0} = \infty$$

$$\theta = \text{Arctg}\,\infty = 90°$$

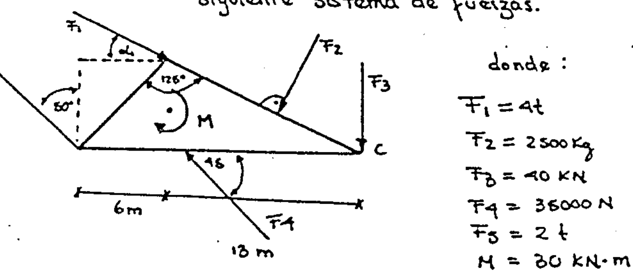
$$\theta = 90° \longrightarrow \text{siempre!!}$$

<u>Punto de aplicación</u>: Para encontrar el punto de aplicación se debe tomar en cuenta lo siguiente:

" El momento producido por la fuerza resultante (R) debe ser igual al momento producido por los fuerzas externas.

$$R \cdot x = F_1 d_1 + (d_1 + d_2) F_2 + (d_1 + d_2 + d_3) F_3 + (d \ldots n) F_n$$

Ejemplo 2,6.- Ubicar la Resultante, en magnitud, dirección, sentido del siguiente sistema de fuerzas.



donde:

$F_1 = 4t$ $\qquad \alpha_1 = 20°$

$F_2 = 2500\,Kg$

$F_3 = 40\,KN$

$F_4 = 35000\,N$

$F_5 = 2\,t$

$M = 30\,KN \cdot m$

En el triángulo se debe calcular H

α β $H=?$ φ θ 6 13

$$tg\alpha = \frac{6}{H} \Rightarrow H = \frac{6}{tg\alpha}$$

$$tg\beta = \frac{13}{H} \Rightarrow H = \frac{13}{tg\beta} \qquad \frac{6}{tg\alpha} = \frac{13}{tg\beta} \quad (1)$$

además $\alpha + \beta = 125 \quad (2)$

de (1) y (2) se tiene la solución en α y β

$$6\, tg\beta = 13\, tg\alpha \qquad \text{pero } \alpha = 125-\beta$$

$$6\, tg\beta = 13\, tg(125-\beta) \qquad \text{pero: } tg(\theta-\varphi) = \frac{tg\theta - tg\varphi}{1+tg\theta \cdot tg\varphi}$$

$$\frac{6\, tg\beta}{13} = \frac{tg125° - tg\beta}{1+tg125°\, tg\beta}$$

$$6tg\beta(1+tg125°\cdot tg\beta) = 13(tg125 - tg\beta)$$

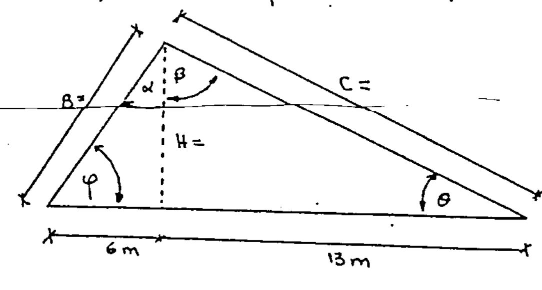
$$6tg\beta(1+(-1{,}428148\, tg\beta)) = 13((-1{,}428148 - tg\beta))$$

$$6tg\beta - 8{,}5689\, tg^2\beta = -18{,}5659 - 13tg\beta$$

$$-8{,}5689tg^2\beta + 19\, tg\beta + 18{,}5659 = 0 \qquad \text{si } tg\beta = -x$$

$$8{,}5689\, x^2 - 19x - 18{,}5659 = 0 \longrightarrow \text{Ecuación cuadrática.}$$

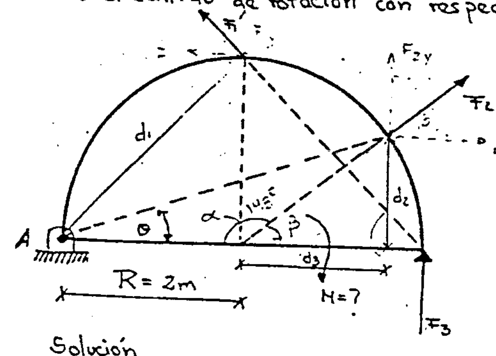
Resolviendo y haciendo operaciones se obtiene:



$\alpha = 53{,}717340888°$
$\beta = 71{,}28265 9112°$
$\varphi = 36{,}282659112°$
$\theta = 18{,}717340888°$
$\alpha+\beta = 125°$
$H = 4{,}40464298371$ [m]

$B = 7{,}443176 72865$ [m]
$C = 13{,}7259199988$ [m]

Ejemplo 2,8 Sobre la placa semicircular, de peso despreciable, actuan tres fuerzas, Hallar la resultante del sistema de fuerzas, además el sentido de rotacion con respecto al punto A.



$F_1 = \sqrt{2}\,P$ donde $P = 10KN$

$F_2 = 5P$ $\theta = 18{,}5°$

$F_3 = 2P$

$F_1 = \sqrt{2}\cdot 10 = 14{,}142$

$F_2 = 50$

$F_3 = 20$

Solución

Cálculos auxiliares.

$d_1 = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2{,}83$

$d_2 = 2\,Sen\,37 = 1{,}204$

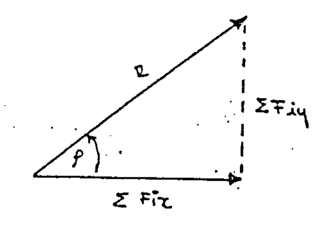
$d_3 = 2\cdot Cos\,37 = 1{,}597$

$2\theta + \alpha = 180$; $2 * 18{,}5 - 180 = -\alpha$

$\alpha = 143°$

$\beta = 180 - 143 = 37°$

F_{ix}	F_{iy}
$F_{1x} = -10\sqrt{2}\,Cos45°$	$F_{1y} = 10\sqrt{2}\,Sen45$
$F_{2x} = 50\,Cos\,37°$	$F_{2y} = 50\,Sen\,37$
$F_{3x} = 0$	$F_{3y} = 20$
$\Sigma = 29{,}952$	$\Sigma = 60{,}091$



$R = 67{,}13$

$tg\,\rho = \frac{60{,}091}{29{,}952} = 2$

$\rho = 63{,}51°$

Sentido de Rotación:

$\curvearrowright + \;\Sigma M_A = 0$

$-14{,}142 * 2{,}8284 - 30{,}09 * 3{,}597 + 39{,}932 * 1{,}204 - 20\cdot 4 - M = 0$

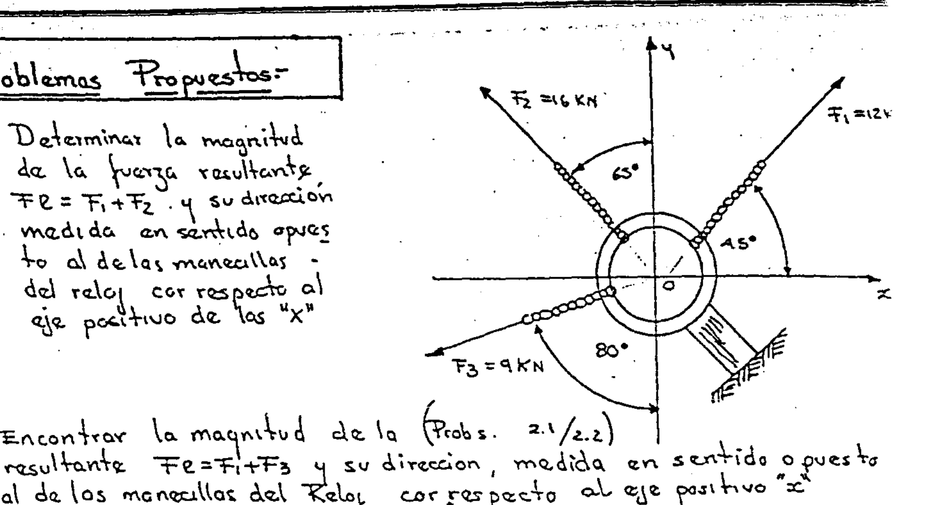
$\boxed{M = -180{,}15\ KN\cdot m}$ Por el signo la placa gira en sentido antihorario

Ubicación de la resultante

$R_y x = F_1\cdot d_1 - F_{2y} * (2+d_3) + F_{2x}\cdot(d_2) - (F_3)\cdot 4$

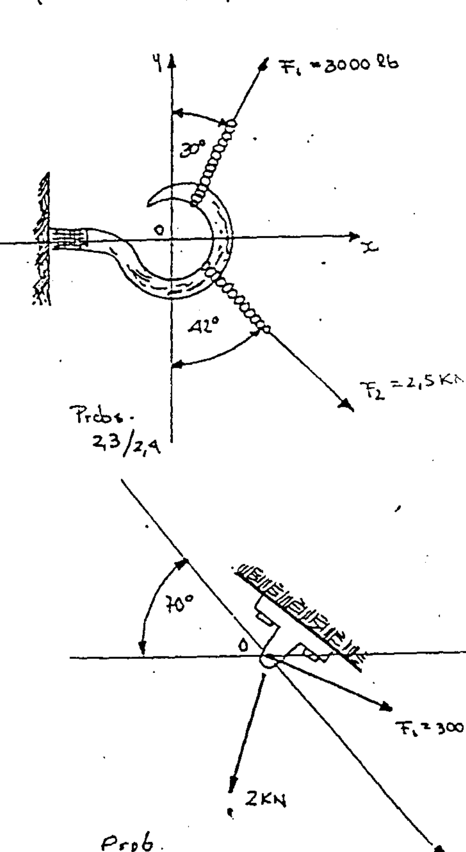
$x = \frac{-180{,}15}{67{,}130} = -2{,}68$ A la izquierda de "A"

Problemas Propuestos:-



(2,1) Determinar la magnitud de la fuerza resultante $F_R = F_1 + F_2$ y su dirección medida en sentido opuesto al de las manecillas del reloj con respecto al eje positivo de las "x"

(2,2) Encontrar la magnitud de la resultante $F_R = F_1 + F_3$ y su direccion, medida en sentido opuesto al de las manecillas del Reloj con respecto al eje positivo "x"



(2,3) Determinar la magnitud de la resultante $F_R = F_1 + F_2$ y su dirección, medida desde "x" en sentido opuesto al de las manecillas del Reloj

(2,4) Determinar la magnitud de la fuerza resultante $R = F_1 - F_2$ y su dirección medida desde "x" en sentido de las manecillas del reloj

(2,5) Determinar la magnitud de la resultante $R = F_1 + F_2$ y su dirección medida en el sentido de las manecillas del reloj con respecto a "u"

(2,6) Descomponer la fuerza F_1 en sus componentes "u" y "v". Determinar la magnitud de dichas componentes.

(2,7) Descomponer la fuerza F_2 en sus componentes que actuan a lo largo de sus ejes "u" y "v" determinar la magnitud de dichas componentes.

(2,8) Un gancho soporta dos fuerzas. F_1 y F_2 si la resultante actua en dirección vertical hacia abajo y tiene una magnitud de 0,75 KN Calcular los ángulos α y β.

P2.8

F_1=500 N

F_2=0,3 KN

(2,9) Un esmeril ejerce una fuerza (F) de 30 lb en un cilindro de Fe que gira al rededor de A (Torno).

Descomponer esta fuerza en sus componentes q' actuan.

a) a lo largo de los ejes "v" y "y"
b) a lo largo de los ejes "x" y "v"

P2.9, 2.10

(2,10) El esmeril del anterior problema ejerce una fuerza (F) de 30 lbs en un cilindro de (Fe) que gira en un torno. Descomponer esta fuerza en sus componentes que actuan.

a) a lo largo de los ejes "u" y "v"
b) a lo largo de los ejes "x" y "y"

(2,11) Determinar la dirección θ ($0° \leq \theta \leq 180°$) de la fuerza F = 4 KN, para q' produsca

a) El momento máximo con respecto al punto A
b) también el mínimo momento con respecto a este punto, calcular los momentos en cada caso

P 2,11

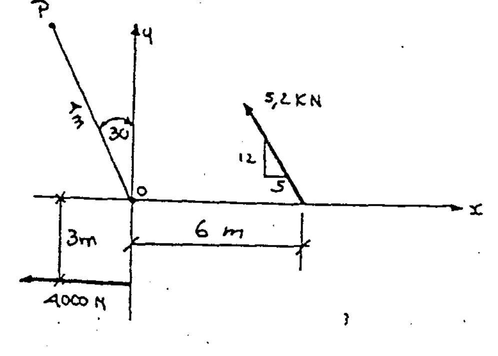
(2,12) la barra curva tiene R = 1,5 m, si una fuerza F = 60 lb actua en su extremo (B) determinar el momento de esta fuerza con respecto al punto A

Prob 2/12, 2.13, 2.14

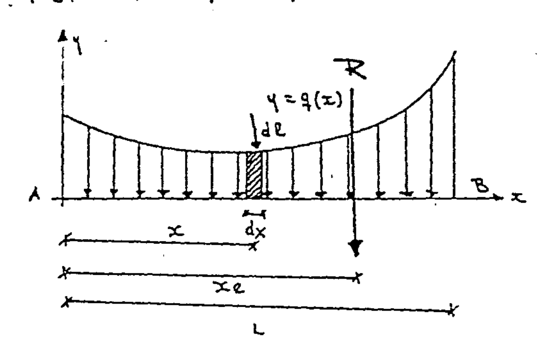
(2,13) Determinar la fuerza más pequeña F que debe aplicarse a lo largo de la cuerda (B-C), con la finalidad de Provocar la rotura de la barra curvada en A, Para esto requiere que se produsca un momento (Mc) de 80 lb·pie.

(2,14) Determinar la magnitud y dirección del momento Resultante de las fuerzas con respecto al punto "O"

(2,15) Determinar la magnitud y el sentido del momento resultant con respecto al punto P.



2.13: FUERZAS DE INTENSIDAD VARIABLE.- En la mayoria de los casos aplicados a una estructura, se presentan en fuerzas de intensidad variable, tales como peso propio, presión de un líquido, empuje de tierras, etc por lo tanto.



Si se toma un elemento diferencial dx, entonces se tiene.

$$dR = y\,dx \qquad \text{pero } y\,dx = dA$$

$$dR = dA \qquad \text{si integramos m/m}$$

$$\int dR = \int dA \implies R = \int_0^L dA$$

$$R = \int_0^L y\,dx \implies \boxed{R = A} \text{ en magnitud}$$

donde: A = Area. R = Resultante

Significa q' la resultante (R) de las fuerzas paralelas dR es igual a la suma de todas las fuerzas dR paralelas.

2.14. UBICACION DE LA FUERZA RESULTANTE.- la línea de acción de la resultante se puede encontrar, igualando los momentos de la fuerza resultante y la distribución de las fuerzas con respecto al punto (o) del sistema de coordenadas.

Por lo tanto

$$x_R \cdot R = \int_0^L x \cdot q(x)\,dx \qquad \text{pero } q(x)\,dx = dA$$

además $\bar{x}_1 = x_R$

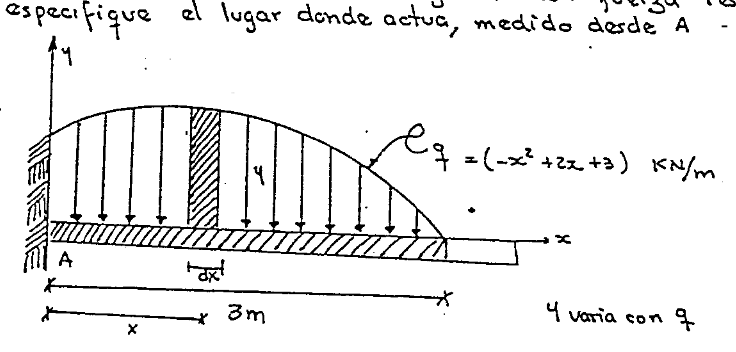
$$\bar{y} \qquad R = \int_0^L y\,dx = \int dA$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x\,dA}{\int_0^L dA}$$

ubicación de la fuerza Resultante.

Esta ecuación representa la coordenada "x" para el centro geométrico ó centroide del área localizada bajo el diagrama de carga distribuida q(x). Por lo tanto la fuerza resultante tiene una línea de acción q' pasa a través del centroide (centro geométrico) del área definida por el diagrama de carga distribuida q(x) según fig.

Ejemplo 2,13 La carga distribuida actúa sobre la Viga determinar la magnitud de la fuerza resultante y especifique el lugar donde actúa, medido desde A -



$$dR = dA = y\,dx$$

$$\int dR = \int y\,dx \Rightarrow R = \int_0^3 (-x^2+2x+3)\,dx$$

$$R = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_0^3 = [-9+9+9]$$

$$\boxed{R = 9\,[KN]}$$

Ubicación:

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{\int_0^3 x\,(-x^2+2x+3)\,dx}{\int_0^3 (-x^2+2x+3)\,dx}$$

Pero: $\int_0^3 (-x^2+2x+3)\,dx = 9\,KN$

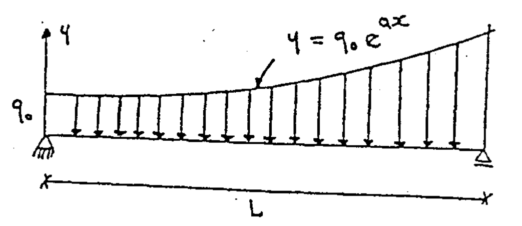
$$R\cdot\bar{x} = \int_0^3 (-x^3+2x^2+3x)\,dx \Rightarrow R\cdot\bar{x} = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 =$$

$$R\cdot\bar{x} = -\frac{3^4}{4} + \frac{2\cdot 3^3}{3} + \frac{3\cdot 3^2}{2}$$

$$R\cdot\bar{x} = -\frac{81}{4} + \frac{54}{3} + \frac{27}{2} = 1{,}25\,[m] \Rightarrow \boxed{x = 1{,}25\ [m]}$$

Problemas Propuestos:-

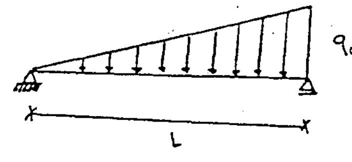
1.- Determinar la fuerza resultante de la carga distribuida y su ubicación desde el punto A.



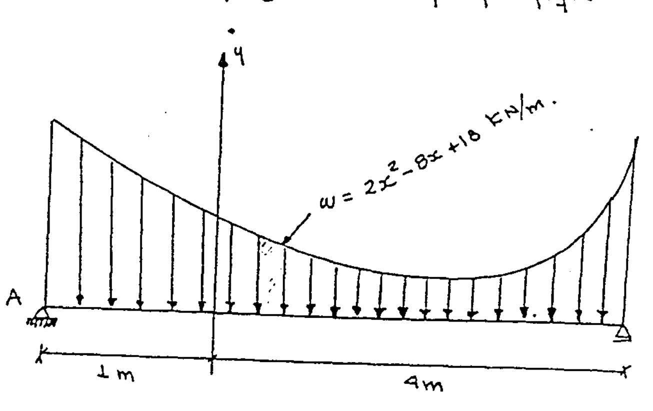
Resp.

$$R = \frac{q_0}{a}\left(e^{a \cdot L} - 1\right) \quad ; \quad \bar{x} = \frac{\left(e^{a \cdot L} \cdot aL - e^{a \cdot L} - 1\right)}{a\left(e^{aL} - 1\right)}$$

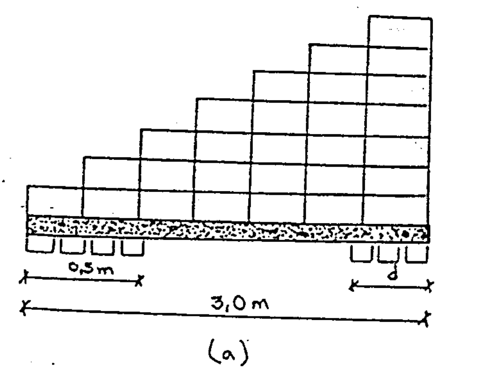
2.- Por integración encontrar la resultante y la ubicación del sistema triangular de la figura



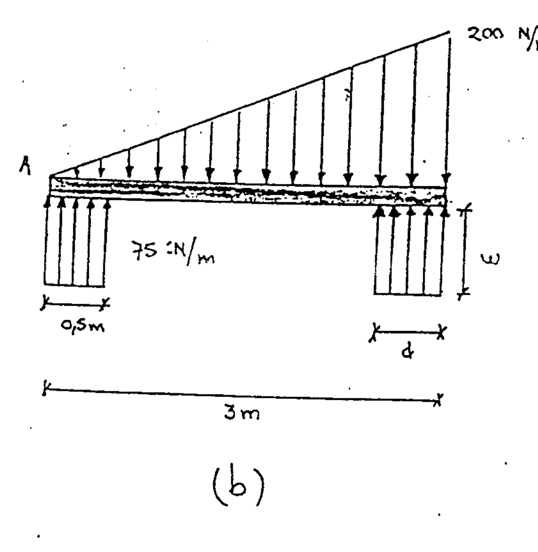
3.- la carga distribuida actua sobre la flecha como se muestra, Determinar la magnitud de la fuerza resultante y especifique su ubicación desde "A".



4. los ladrillos sobre la viga y los apoyos en la parte inferior, crean la distribución de la carga vista de la fig(b), determinar la intensidad w que se requiere y la dimensión "d" del apoyo adecuado para que la fuerza Resultante, con respecto al punto A del sistema sea igual a cero



(a)

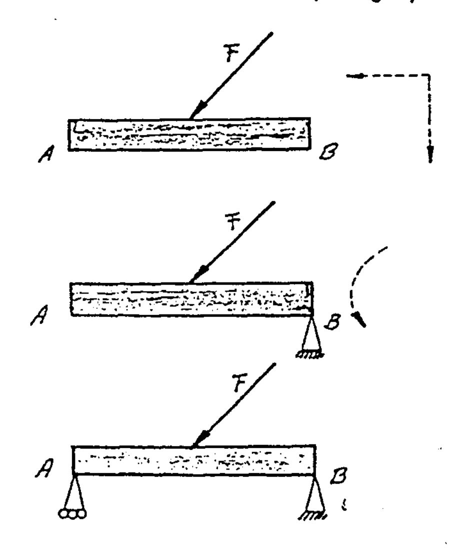


(b)

2.15 ELEMENTOS DE SUJECION DE UNA ESTRUCTURA.-

Apoyos.- La mayoria de las estructuras para tener estabilidad deben estar sustentados por elementos llamados "APOYOS"

Para tal efecto consideremos por ejemplo:



El elemento AB tiende a desplazarce hacia la izquierda, además de bajarse.

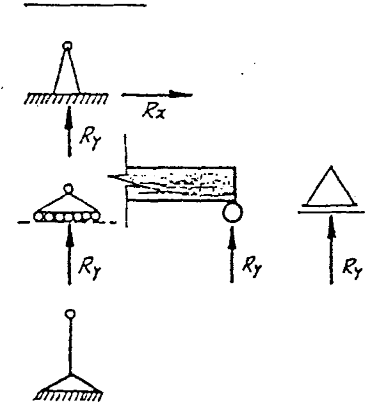
Tiende a girar con respecto al punto "B".

El elemento AB es ESTABLE, produciendo reacciones desconocidas en los Apoyos A y B.

2.16 TIPOS DE APOYOS.-

Para que una estructura permanesca estable, tenemos varios tipos de sujeción (apoyos).

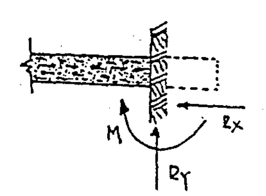
TIPOS	CARACTERISTICA PRINCIPAL



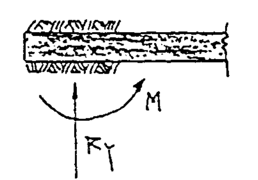
* Apoyo fijo articulado, acepta reacciones R_x y R_y siempre perpendicular y paralela al plano.

* Apoyo movil articulado acepta reacciones R_y, normales al plano de apoyo.

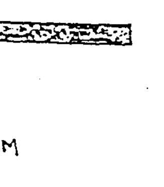
* Apoyo de biela, para movimientos pequeños se comporta como apoyo movil y para grandes esfuerzos produce momentos de giro.



Apoyo empotrado produce tres tipos de reacciones Rx, Ry y M.

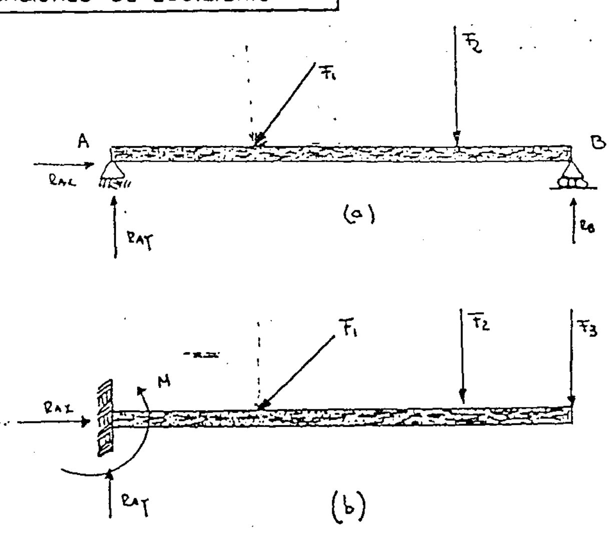


Apoyo Semiempotrado o sea apoyo de Vaiven, acepta Ry y M.



Apoyo elástico, acepta reacciones Ry y M, para grandes esfuerzos puede existir Rx.

2.17. ECUACIONES DE EQUILIBRIO.-



Si se quitan los apoyos en la estructura (a) de la figura, se tiene las fuerzas R_{AY} y R_{AX}, por otro lado si se hace lo mismo en el apoyo "B", se tiene la reacción (R_B). Por lo tanto, en la estructura actuará un sistema de fuerzas coplanarios constituida por las fuerzas q' actuan fuerzas activas y las reacciones desconocidas (fuerzas de reacción).

Un cuerpo que inicialmente está en reposo, y permanece en este estado cuando actuan sobre el un sistema de fuerzas, se dice q' está: en un "Equilibrio Estático".

« Para q' exista tal estado es nesesario q' el efecto resultante combinado de fuerzas no sea ni una fuerza ni un par: en otro caso habrá tendencia al movimiento del cuerpo.».

Por lo tanto debe cumplir:

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad \Sigma F_Y = 0 \qquad \Sigma M = 0$$

llamada ecuaciones fundamentales de equilibrio.

EQUILIBRIO DE UN CUERPO RIGIDO

3.1. DEFINICION: En esta parte se mostrará q' para q' exista el equilibrio se requiere a su vez, de un "equilibrio de Fuerzas", a fin de evitar que el cuerpo rígido experimente un movimiento de traslación con movimiento acelerado, y de un "Equilibrio de Momentos", para impedir que el cuerpo gire.

Muchos tipos de problemas en ingeniería involucran cargas simétricas y pueden ser resueltos proyectando sobre un plano único todos los fuerzas q' actuan sobre el cuerpo.

3.2. CONDICIONES PARA EL EQUILIBRIO DE UN CUERPO RIGIDO: En el capítulo anterior se estableció que una partícula se encuentra en equilibrio si esta permanece en reposo o se mueve con velocidad constante.

Para que esto suceda es "suficiente y nesesario con q' la fuerza resultante q' actuá sobre la partícula sea igual a cero"

O sea que la $\boxed{\Sigma F_x = 0}$; $\boxed{\Sigma F_y = 0}$; $\boxed{\Sigma M = 0}$

Si en una de los ecuaciones $\Sigma F_x = 0$, por ejemplo existe un incremento ΔF_x

$$\Sigma F_x + \Delta F_x = 0$$

Suponer que la ΔF_x es una fuerza adicional q' se requiere para mantener el cuerpo en su estado de equilibrio ; por lo tanto existirá otro incremento ΔM correspondiente a dicha fuerza.

Luego:

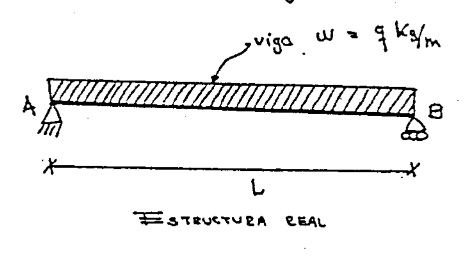
$$\Sigma M + \Delta M = 0$$

donde ΔM es un incremento de momento debido a la fuerza ΔF. Pero debe existir equilibrio estático vale decir

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Delta F_x = 0 \qquad \text{ó también} \qquad \Delta M = 0$$

3.3. DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE: la aplicación correcta de las ecuaciones de equilibrio requiere una especificación completa de todas las fuegas externos conocidas y desconocidas -

q' actuan sobre el cuerpo rigido (estructura). La mejor manera de describir tales fuerzas es dibujando en un diagrama de cuerpo libre de aquel - Este diagrama es un bosquejo de la forma del cuerpo, q' lo representa - aislado o "libre" Ej.



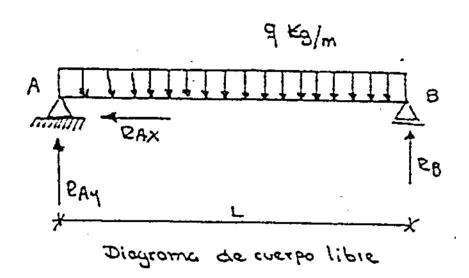
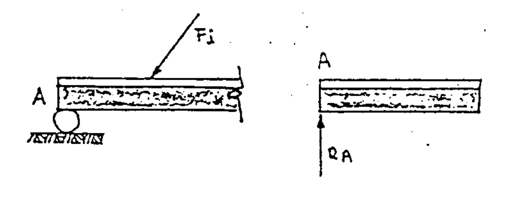
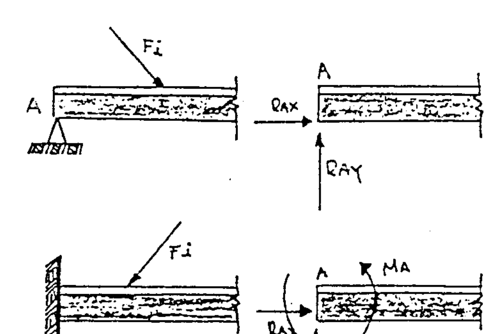


Diagrama de cuerpo libre

3.4. REACCIONES EN LOS APOYOS:- Se retiran los apoyos o sustentaciones en una estructura, consideremos primero los diferentes tipos de reacciones que ocurren en los apoyos o puntos - de soporte entre cuerpos sujetos a este sistemas de fuerzas coplanares. "Como una regla general, si un apoyo evita la traslación de - un cuerpo en una dirección dada, entonces se desarrolla una fuerza - sobre el cuerpo en esa dirección - De la misma forma, si se evita el giro, se ejerce un momento "PAE" sobre tal cuerpo.



* Puede trasladarse horizontalmente pero ofrece resistencia en el sentido vertical; además - Gira en A



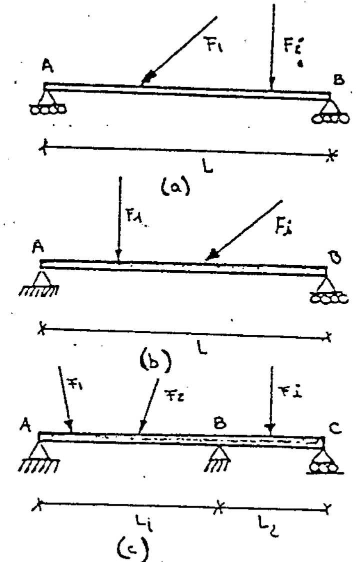
* No puede trasladarse horizontal ni verticalmente, pero puede girar alrededor de A

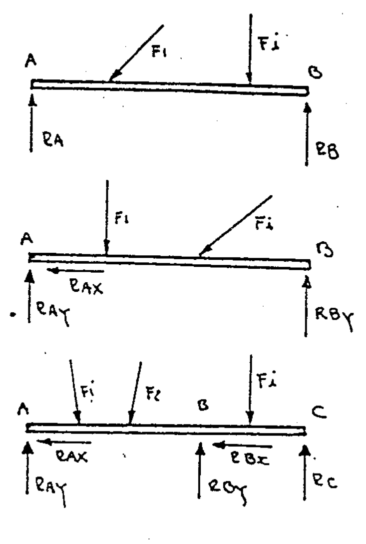
* No puede trasladarse horizontal ni verticalmente, el giro esta - restringido.

<u>Nota</u>- los reacciones siempre son normales al plano de apoyo, o en su - caso paralelas al plano de apoyo.

3.5. CLASIFICACION DE ESTRUCTURAS:-

A:) Según el grado estático:- Si se tiene por ejemplo las siguientes estructuras.





Si aplicamos las ecuaciones fundamentales de la estática, o sea.

$$\Sigma Fx = 0 \qquad \Sigma Fy = 0 \qquad \Sigma M = 0$$

Se tiene 3 ecuaciones fundamentales, llamaremos por $E = 3$ y las reacciones por R

$$N = R - E$$

En la estructura (a) $\quad N = 2 - 3 = -1$
En la estructura (b) $\quad N = 3 - 3 = 0$
En la estructura (c) $\quad N = 5 - 3 = 2$

Entonces podemos resumir que (N) = grado estático

Si

$N < 0$ } Hiperestático inestable
$N = 0$ } Isostático estable
$N > 0$ } Hiperestático estable

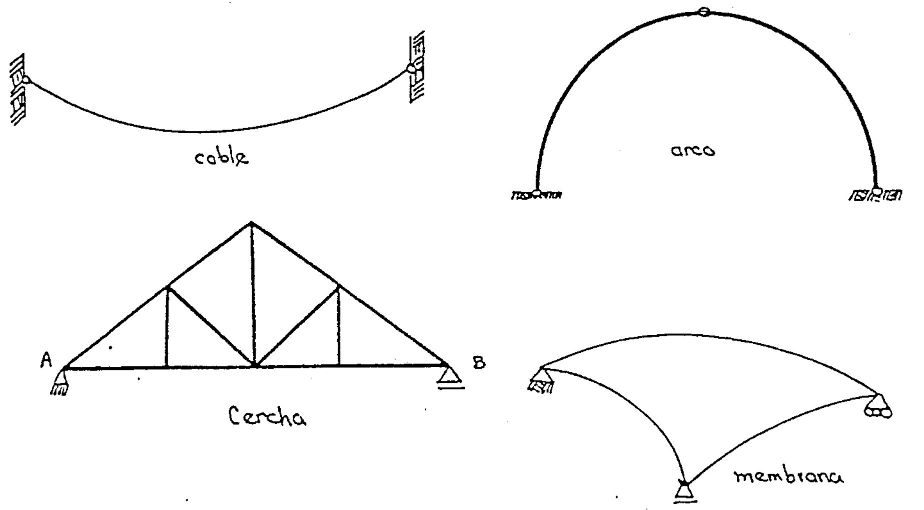
B:) formas estructurales:- la decisión más importante a tener por un ingeniero de estructuras referente a su proyecto es la elección de la forma estructural más conveniente para satisfacer las diversas necesidades y objetivos de un proyecto en particular.

la forma estructural más conveniente es la q' satisfaga las necesidades funcionales, económicas, sociológicas, estéticas y otras en mayor

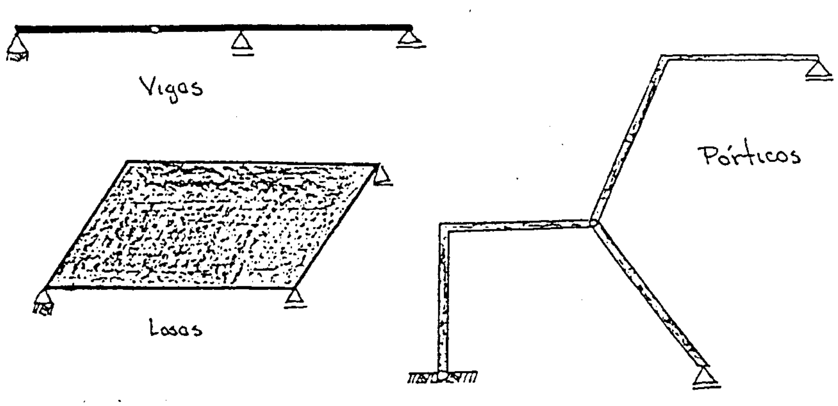
grado, y la que pueda construirse económicamente y fácilmente utilizando los materiales y métodos constructivos más apropiados.

Estas estructuras pueden clasificarse dentro de los grupos siguientes.

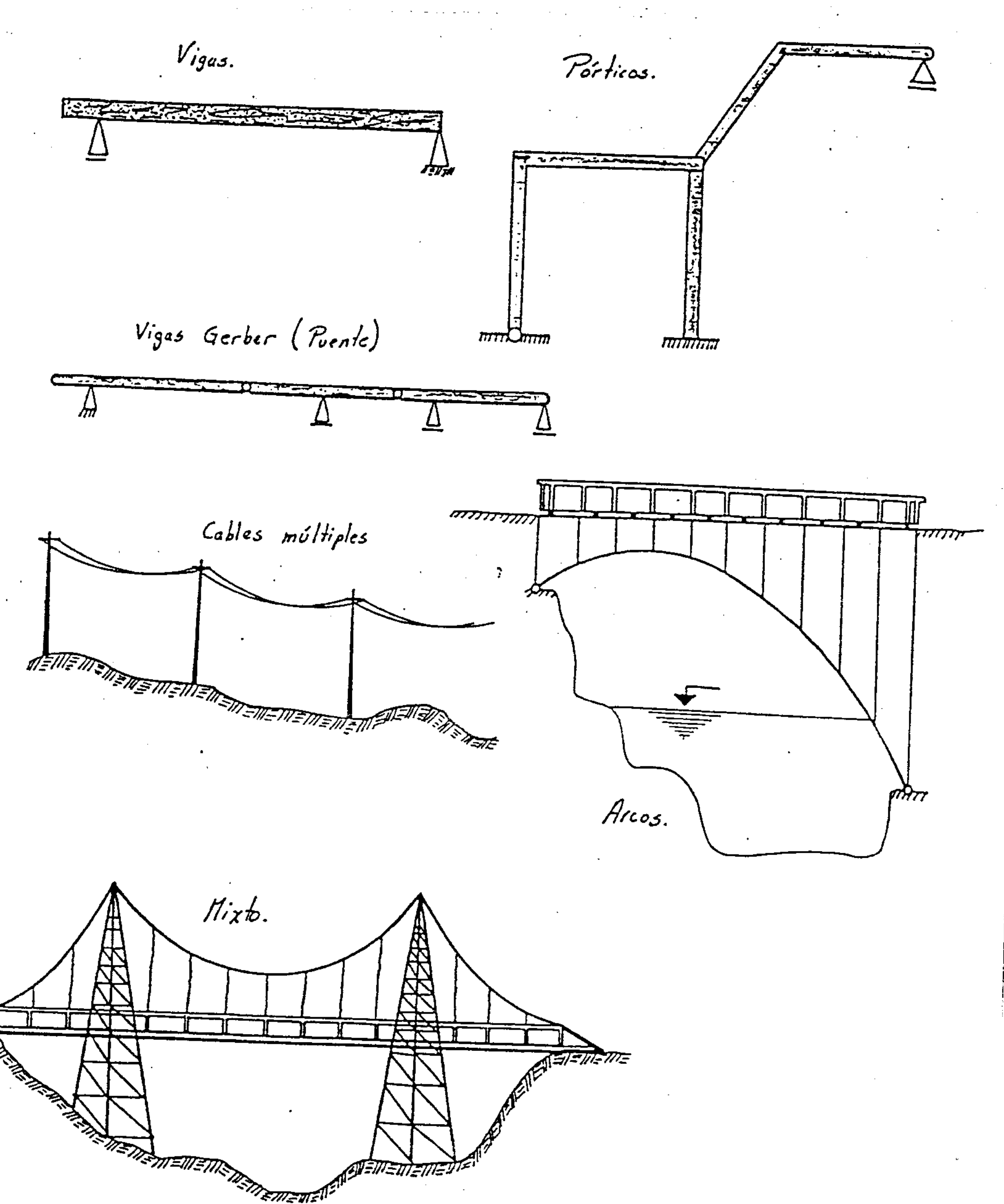
a).- <u>formas con tensiones uniformes</u>.- Son aquellas en las que la tensión es uniforme en toda la profundidad del elemento, o en el espesor de un panel como por ejemplo; cables, arcos, elementos de cercha, membranas, láminas, etc.



b).- <u>formas con tensiones variables</u>.- A su vez las estructuras pueden clasificarse según su eje estructural donde las tensiones son variables con la profundidad o espesor normalmente desde una tensión máxima de tracción en una cara hasta una tensión máxima de compresión por ejemplo vigas - pórticos rígidos, losas, placas, etc.

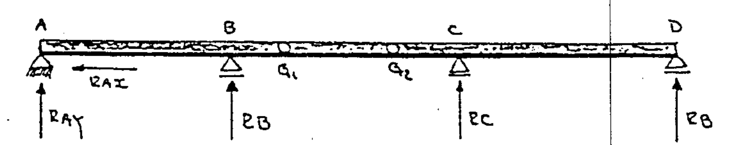


c) <u>Según su geometría</u>.- A su vez las estructuras pueden Clasificarse según su eje estructural en rectilíneas y curvilíneas ó mixtas.



3.6. ECUACION DE CONDICION.- Muchas estructuras estan constituidas simplemente por un cuerpo rígido, P. ej: una cercha, un pórtico o una viga, inmovilizada en el espacio por un cierto número de apoyos. Sin embargo, a veces puede estar formada por varios cuerpos rígidos parcialmente unidos entre si de algún modo, ejemplo.

Ejemplo



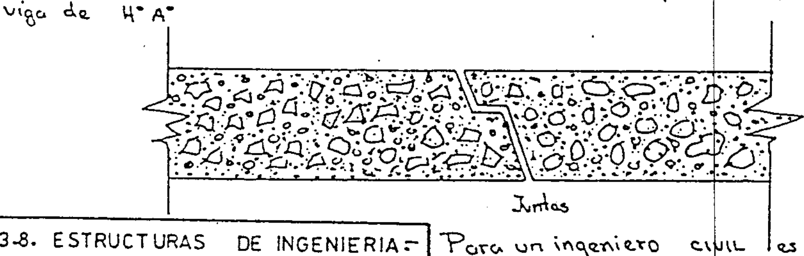
Si tenemos la viga A, B, C y D es una estructura hiperestática de 2° grado, pero sin embargo se puede crear dos articulaciones G_1 y G_2 llamadas (ecuaciones de construcción) ó ecuaciones de condición: la única finalidad es q' el o los momentos en esta articulación sean iguales a cero por lo tanto si analizamos estáticamente la estructura se tiene:

Ecuación de condición $N = R_i - E - G_i$

$G_E = 5 - 3 - 2$ Ecuaciones de condición en G_1 y G_2

$G_E = 0$ ⟶ Por lo tanto la estructura es isostática

3.7. FORMA PRACTICA DE CREAR UNA ARTICULACION.- Una articulación se crea fácilmente, P. ej. una viga de H° A°

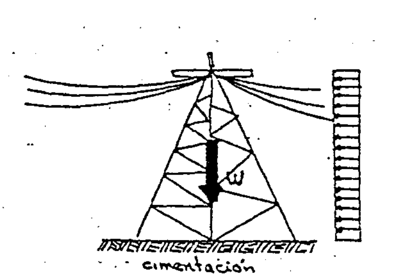


3.8. ESTRUCTURAS DE INGENIERIA.- Para un ingeniero civil es muy importante el proyecto de presentar (Puentes) Edificios, tórres y otras estructuras fijas, tales estructuras estan compuestos por elementos unidos entre si y sustentados de manera q' puedan sujetar o soportar en equilibrio estático, las fuerzas exteriores aplicadas.

Una estructura debe tambien mantener en equilibrio a las fuerzas de la gravedad, q' le estan aplicadas como consecuencia de su peso propio.

Por Ejemplo, sobre una torre de alta tensión actuan su peso propio, cargas de viento, carga de hielo o nieve aplicados -

directamente a la torre, además las fuerzas de tensión de los cables. Por lo tanto, debe disponerse y proyectarse los elementos de la torre para que puedan soportar las cargas de equilibrio estático y transferir así sus efectos a la cimentación.



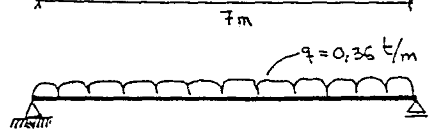
3.9. PROYECTO ESTRUCTURAL:- Una estructura se proyecta para que cumpla una misión determinada, para la cuál debe tener la suficiente resistencia y rigidez, otro aspecto de gran importancia en el proyecto estructural son la economía y el buen aspecto.

Un proyecto completo debe contener las cinco faces siguientes

1°) Establecer el planteamiento general, para determinar los requisitos funcionales de la estructura
2°) Considerar las diversas soluciones posibles q' satisfagan estos requisitos.
3°) Proyecto estructural preliminar de las diversas soluciones posibles.
4°) Elección de la solución más satisfactoria, teniendo en cuenta consideraciones económicas funcionales y estéticas.
5°) Proyecto detallado de la solución más satisfactoria.

En los puntos anteriores estan entremezcladas las faces parciales. Primero deben determinarse, las cargas que actuan en la estructura, luego hay que analizar las tensiones máximas y finalmente dimensionar la estructura.

3.10. CARGAS:- a) fijas- la carga fija, que actua sobre una estructura consta del peso propio de la estructura y de todas las demás cargas inmóviles, constantes en magnitud y asignadas permanentemente por ejemplo una viga de hormigon Armado.



El peso propio de la viga de H° A° será:

$W = V \cdot \gamma$ si $\gamma = 2{,}4\ t/m^3$

$W = 7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 2{,}4$

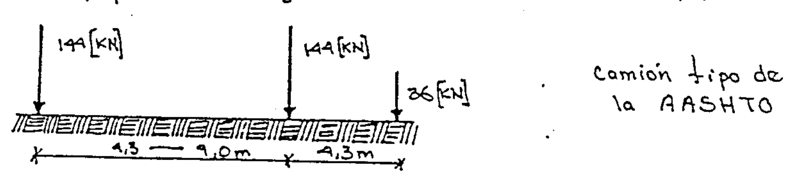
$W = 1{,}05 \cdot 2{,}4$

$W = 2{,}52\ t$

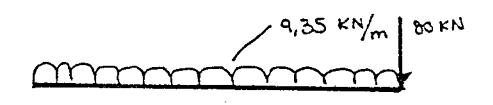
$q = \frac{W}{L} = \frac{2{,}52}{7} = 0{,}36\ t/m$

3.11. SOBRECARGAS: A diferencia de las cargas fijas, q' permanecen invariables tanto en magnitud como en posición, las sobrecargas varían en su emplazamiento. A veces es conveniente clasificar las sobrecargas en movibles y móviles; las cargas movibles son las q' pueden cambiarse de una posición a otra en una estructura, tales como el contenido de un edificio de almacen; generalmente se aplica gradualmente y sin impacto, mientras que las móviles son las q' se mueven por su propia energía, tales como un tren, serie de camiones, estos se aplican generalmente en forma rápida, por lo tanto ejercen un efecto de fuerza llamado impacto.

a) Sobrecarga para puentes de carretera: la sobrecarga para puentes de carretera consta del peso propio de las cargas móviles de los vehículos y peatones.



Camión tipo de la AASHTO



Carga equivalente

b) Sobrecargas para edificios: Generalmente se consideran las sobrecargas para edificios como cargas uniformemente repartidas movibles. Ejemplo.

- Habitaciones privadas, casas de vivienda — 200 Kg/m²
- Oficinas, escuelas, etc — 250 Kg/m²
- Almacenes — 1250 Kg/m²

c) Impacto: la deformación de una estructura sometida a una sobrecarga es mayor cuando esta se aplica gradualmente q' la que se tendría una carga estática.

Para puentes de carretera la AASHTO define.

$$I = \frac{50}{3{,}28 \cdot L + 125} \quad \text{Sin exceder a} \quad L = [\text{pies}] \quad 30\%$$

$$I = \frac{15}{L + 38} < 0{,}3 \qquad L = [\text{metros}]$$

d) Cargas de nieve y hielo.- Es muy importante considerar las cargas de nieve y hielo especialmente en el proyecto de techos, la nieve se considera como una carga movible. En algunos lugares alcanzan de 300 a 450 Kg/m^2

e) Fuerzas de Viento.- las cargas de viento son particularmente importantes en el proyecto de estructuras grandes, como edificios, torres de Radio, puentes de gran luz, edificios industriales, hangares, silos, etc.

$$q = \frac{V^2}{16}$$

donde q = presión Kg/m^2

V = Velocidad

$q_1 = 0{,}6 \cdot q$

$q_2 = 0{,}7 \cdot q$

f) Empujes del terreno.- a menudo hay que considerar cargas sobre muros de contensión, muro de edificios, muros de zótano, relleno en los estribos de puentes, debidas a empujes del terreno, la presión debida a este rrelleno origina una fuerza de magnitud variable segun la altura de rrelleno;

Ejemplo

Si $\theta = 90°$ $i = 0°$ $\phi = 0'$

Se traduce en

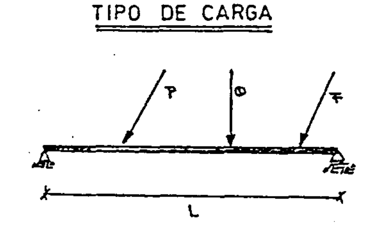
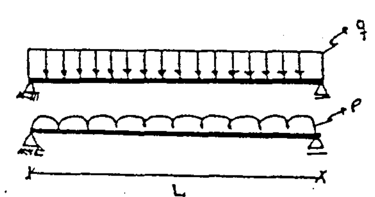
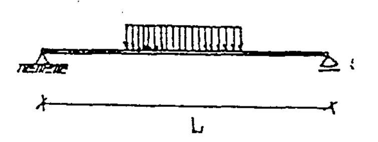
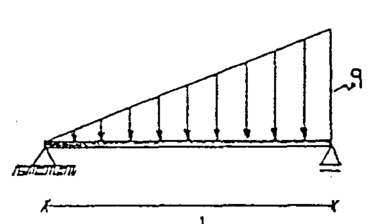
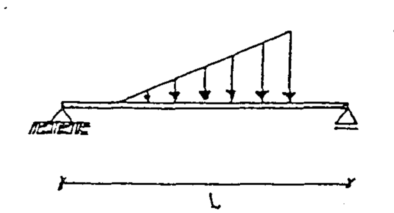
$$P = \frac{1}{2} \gamma H^2 \left[\frac{\cos \phi}{(1 + \sqrt{2}\,\mathrm{Sen}\,\phi)^2} \right]$$

la carga P actua sobre $H/3$ por encima de la base.

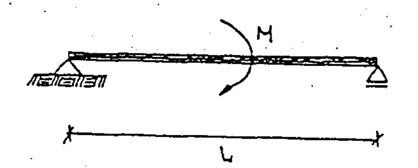
g) Presiones hidrostáticas.- Las estructuras sometidas a presiones hidrostáticas tales como presas, tanques, depósitos de combustibles, etc, se pueden calcular fácilmente de acuerdo con los principios elementales de la hidraúlica, además las cargas hidrostáticas se consideraran como cargas movibles, por cuanto los esfuerzos críticos en la estructura serán cuando están vacios.

3.12. RESUMEN DE CARGAS.-

Para fines de cargas a una estructura se presenta el siguiente resúmen

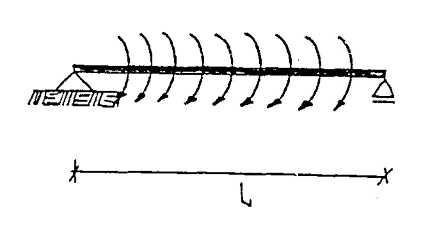
TIPO DE CARGA	NOTACION	DESC. Y UNIDADES
	Se puede denotar por: P, Q, F.	Cargas puntuales sus unidades son [Kg] [tn] [KN] [N] [lb]
	Se puede denotar por: p, q, w, etc	Cargas uniformemente distribuidas Kg/m, tn/m, KN/m, N/m, lb/pie
	Se puede denotar por: p, q, w, etc	Cargas uniformemente distribuidas en un tramo parcial. Kg/m, tn/m --- etc.
	Se puede denotar por p, q, w en la máxima ordenada	Cargas uniformemente variables Kg/m, tn/m, KN/m, etc.
	Se puede denotar por p, q ó w en la máxima ordenada.	Cargas uniformemente variables en un tramo parcial Kg/m, tn/m, etc

TIPO DE CARGA	NOTACION	DESC. Y UNIDADES



Se puede denotar por M

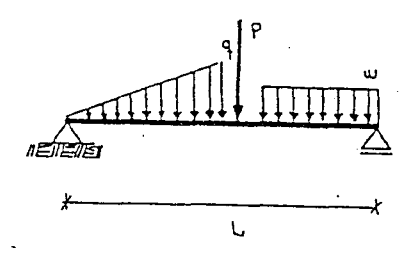
Carga PAR único ó carga momento Kg·m, tn·m, KN·m, etc.



Se puede denotar por [m]

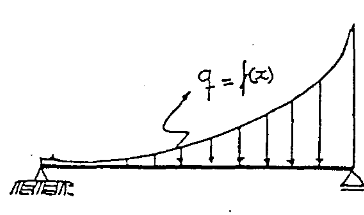
Carga PAR uniformemente distribuida.

Kg·m/m tn·m/m KN·m/m



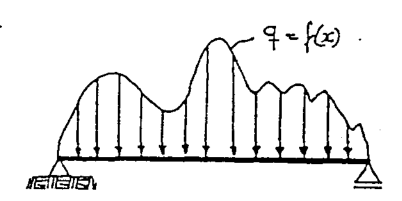
Su notación es combinada

Cargas combinadas sus unidades segun las cargas.



Su notacion: $q = f(x)$

Carga variable segun f(x) Sus unidades P, q, w en la ordenada máxima.



Su notación $q = f(x)$

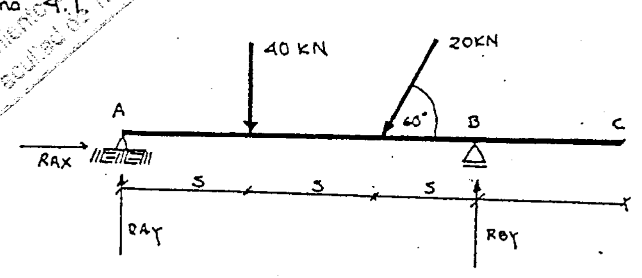
Cargas variables combinadas segun f(x) sus unidades variables.

RESOLUCION DE ESTRUCTURAS

4

4.1. CALCULO DE REACCIONES: Los primeros incógnitas que se presentan en una estructura son las reacciones de apoyo.

Problema 4.1.



El tramo AB se llama viga entre 2 apoyos (A y B) y el tramo BC se llama voladizo con apoyo en (A). Su resolución: Se basa en la aplicación de las 3 ecuaciones fundamentales de la estática.

$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_A = 0 \qquad 40 \cdot 5 + 20 \text{ sen } 60° \cdot 10 - R_B \cdot 15 = 0$

$$R_B = \frac{373{,}205}{15} = 24{,}88 \text{ KN}$$

$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_B = 0 \qquad R_{AY} \cdot 15 - 40 \cdot 10 - 20 \cdot \text{Sen } 60 \cdot 5 = 0$

$$R_{AY} = \frac{486{,}603}{15}$$

$$R_{AY} = 32{,}44 \text{ KN}$$

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \qquad R_{AX} - 20 \cos 60° = 0$

$$R_{AX} = 10 \text{ KN}$$

Nota 1: Para q' exista estabilidad en la estructura, el equilibrio de fuerzas debe estar en equilibrio estático.

Vale decir

$$\Sigma F_x = 0; \Sigma F_y = 0; \Sigma M_o = 0.$$

Comprobación:

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \qquad R_{AX} - 20 \cos 60° = 0$

$$10 - 10 = 0$$

$\overset{+}{\uparrow} \Sigma F_y = 0 \qquad R_{AY} + R_B - 40 - 20 \text{ Sen } 60° = 0$

$$32{,}44 + 24{,}88 - 40 - 17{,}32 = 0$$

problema 4.2

En la estructura mostrada en la figura existen fuerzas extremas de 25, 20 y 30 t, además de las fuerzas desconocidas R_A, R_{Bx} y R_{By} - (Reacciones) Su cálculo: existen dos posibilidades.

1ra) FORMA

$\Sigma M_A = 0$

$\operatorname{Sen}\alpha = \frac{4}{5}$

$\cos\alpha = \frac{3}{5}$

$F_y = 25 \cdot \operatorname{Sen}\alpha$

$F_y = 25 \cdot \frac{4}{5} = 20$

$\Sigma M_A = 0$

$20 \cdot 1 - 20 \cdot 3 + 30 \cdot 5 - R_{By} * 6 = 0 \qquad R_{By} = \frac{110}{6}$

$R_{By} = 18{,}33\,t$

a su vez la reacción en A (R_A) se puede descomponer en R_{Ax} y R_{Ay}, por lo tanto:

$\operatorname{Sen}\beta = \frac{3}{5}$

$\operatorname{Cos}\beta = \frac{4}{5}$

$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = tg\,\beta$

$tg\,\beta = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

$\Sigma M_B = 0 \quad (1) \quad R_{Ay} \cdot 6 - 20 \cdot 5 + 20 \cdot 3 - 30 \cdot 1 = 0$

$\Sigma F_x = 0 \qquad R_{Ax} + 15 - R_{Bx} = 0 \; (2) \qquad tg\,\beta = \frac{R_{Ax}}{R_{Ay}} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{R_{Ax}}{R_{Ay}} \; (3)$

las soluciones de (1), (2), (3) dan los resultados del problema.

de (1) $R_{Ay} = \frac{70}{6} = 11{,}67\,t \Rightarrow R_{Ay} = 11{,}67\,t$

de (3) $\frac{3}{4} * 11{,}67 = R_{Ax} \Rightarrow R_{Ax} = 8{,}75\,t$

finalmente en (2)

$8{,}15 + 15 = R_{Bx} \Rightarrow R_{Bx} = 23{,}75\,t$

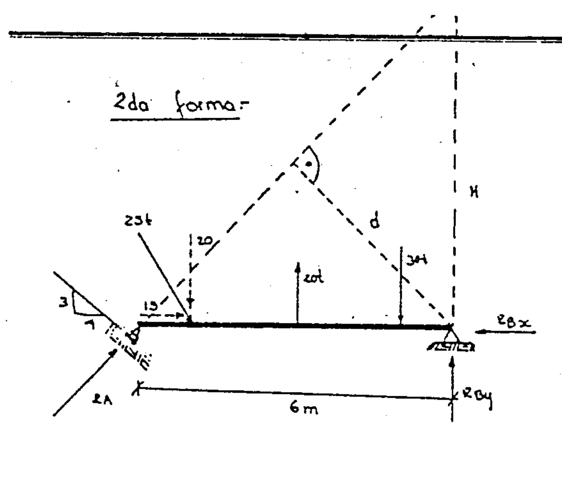
Control $\Sigma F_x = 0$

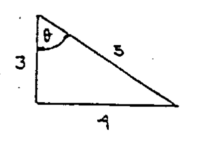
$8{,}75 + 15 = 23{,}75 \qquad \Sigma F_y = 0; \quad 11{,}67 + 18{,}33 + 20 = 20 + 30$

$50 = 50$

2da forma:

la Segunda forma es buscar un punto de intersección entre las rectas de acción de RA y RBy o sea (0)





$\text{Sen}\,\theta = \frac{4}{5}$

$\text{Cos}\,\theta = \frac{3}{5}$

$\text{tg}\,\theta = \frac{4}{3}$

$\text{tg}\,\theta = \frac{H}{6} \Rightarrow H = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8m$

$\text{Sen}\,\theta = \frac{d}{6} \Rightarrow d = 6 \cdot \frac{4}{5} = 4{,}8$

Luego $\curvearrowright \Sigma M_o = 0$

$$-20 \cdot 5 + 20 \cdot 3 - 30 \cdot 1 - 15 \cdot 8 + RBx \cdot 8 = 0$$

$$RBx = \frac{190}{8} = 23{,}75\,t$$

$\curvearrowright \Sigma M_A = 0$

$$20 \cdot 1 - 20 \cdot 3 + 30 \cdot 5 - RBy \cdot 6 \Rightarrow$$

$$RBy = \frac{110}{6} = 18{,}33$$

$\curvearrowright \Sigma M_B = 0$

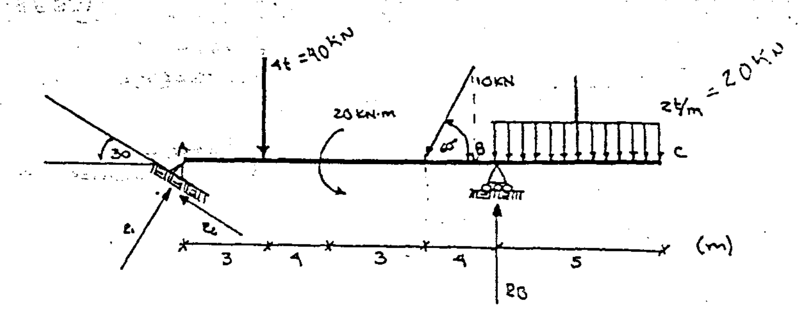
$$RA \cdot 4{,}8 - 20 \cdot 5 + 20 \cdot 3 - 30 \cdot 1 = 0$$

$$RA = \frac{70}{4{,}8} = 14{,}58\,t$$

$$RAx = \frac{3}{5} * 14{,}58\,t = 8{,}75\,t$$

$$RAy = \frac{4}{5} * 14{,}58\,t = 11{,}67\,t$$

(4,3) Calcular las reacciones de la siguiente estructura.



1°) Análisis estructural (grado estático)

$$GE = N° \text{ Reacciones} - 3 = 3 - 3 = 0$$

2°) Análisis de unidades : (Uniformizar unidades de un sistema a otro

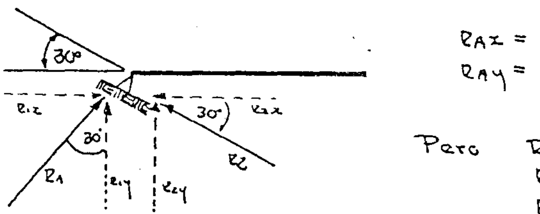
1 Kg ≈ 10 N　　　　1 KN ≈ 1000 N

1 ton = 1000 Kg ⟹ 4000 Kg = 40000 N = 40 KN

⟹ 2 ton = 2000 Kg = 20 KN

3°) Análisis de apoyos : (El apoyo A, tiene cierta inclinación por lo tanto se producen reacciones R_1 y R_2, que a su vez cada uno de e tiene su componente R_{1x} y R_{1y} ; R_{2x} y R_{2y} respectivamente).

Por lo tanto:



$R_{Ax} = R_{1x} - R_{2x}$ (Según fig)

$R_{Ay} = R_{1y} + R_{2y}$ (Según fig)

Pero
$R_{1x} = R_1 \text{ Sen } 30°$
$R_{1y} = R_1 \text{ Cos } 30°$
$R_{2x} = R_2 \text{ Cos } 30°$
$R_{2y} = R_2 \text{ Sen } 30°$

4°) Resolución de la estructura

$+ \sum M_A$

$$40 \cdot 3 - 20 + 10 \cdot \text{sen } 60 \cdot 10 - R_B \cdot 14 + 20 \cdot 5 (14 + 2{,}5) = 0$$

$$R_B = \frac{1836{,}6025}{14} = 131{,}1859 \text{ KN}$$

$+ \sum M_B = 0$

$$R_{1y} * 14 + R_{2y} * 14 - 40 \cdot 11 - 20 - 10 \text{ sen } 60 \cdot 4 + 20 \cdot 5 \cdot 2{,}5 = 0$$

$R_1 \cos 30° \cdot 14 + R_2 \text{Sen } 30 \times 14 - 440 - 20 - 34{,}641 + 250 = 0$

$14 R_1 \cos 30 + 14 R_2 \text{Sen } 30 - 244{,}641 = 0$ (1)

$\xrightarrow{+} \Sigma Fx = 0$

$R_{1x} - R_{2x} - 10 \cos 60 = 0$

$R_1 \text{Sen } 30 - R_2 \cos 30 - 5 = 0$ (2)

En (2) $0{,}5 \cdot R_1 = R_2 \cos 30° + 5$

$R_1 = 1{,}73205\ R_2 + 10$ ⟶ luego en (1)

$14 (1{,}73205 \cdot R_2 + 10) \cos 30 + 14 R_2 \text{Sen } 30 - 244{,}641 = 0$

$27{,}99999 \cdot R_2 = 123{,}397444$

$$R_2 = \frac{123{,}397444}{27{,}99999} = 4{,}407$$

$$R_1 = 17{,}633\ [KN]$$

$R_{1x} = R_1 \text{Sen } 30 = 8{,}8169$

$R_{1y} = R_1 \cos 30 = 15{,}271$

$R_{2x} = R_2 \cos 30 = 3{,}8166$

$R_{2y} = R_2 \text{Sen} 30 = 2{,}2035$

$R_{Ax} = R_{1x} - R_{2x} = 5{,}0003$

$R_{Ay} = R_{1y} + R_{2y} = 17{,}4745$

Control $\xrightarrow{+} \Sigma Fx = 0 \quad 5 - 5 = 0$

$+\uparrow \Sigma Fy = 0 \quad 17{,}4745 + 131{,}1859 - 40 - 8{,}66 - 100 = 0$

$0 = 0$ //

PROBLEMA 4,4.- Sin considerar el peso propio de la viga apoyada sobre el suelo, y según las cargas mostradas en la figura. Calcular la reacción en el piso.

fig (a)

fig (b)

Suponemos q' la reacción producida en el suelo será según la mostrada en la figura (b) (variación Lineal).

La reacción se subdivide en una fuerza uniforme (rectangular) y otro de variación uniforme (triangular) cuyas resultantes son R_1 y R_2 respectivamente, con magnitudes w_1 y w_2 en los extremos

$$\therefore \quad R_1 = w_1 * 13 \quad ; \quad R_2 = \frac{1}{2}(w_2 - w_1) \cdot 13$$

Haciendo $\overset{+}{\sum} M_c = 0$

$$-R_1 \cdot 3,5 - R_2\left(\frac{2}{3} \cdot 13 - 3\right) + 5 * 8 = 0$$
$$-w_1 * 13 \cdot 3,5 - \frac{1}{2}(w_2 - w_1) \cdot 13\left(\frac{2}{3}13 - 3\right) + 40 = 0$$
$$-45,5 \cdot w_1 - 36,833(w_2 - w_1) + 40 = 0$$
$$-36,8333 \cdot w_2 - 8,6667 \cdot w_1 + 40 = 0 \qquad (I)$$

$\sum M_o = 0$

$$-4 * 8 + R_1 * 4,5 + R_2\left(\frac{13}{3} - 2\right) = 0$$
$$-32 + w_1 * 13 \cdot 4,5 + \frac{1}{2}(w_2 - w_1) 13 * \left(\frac{13}{3} - 2\right) = 0$$
$$-32 + 58,5 \cdot w_1 + 15,16667(w_2 - w_1) = 0$$
$$15,16667 w_2 + 43,333 \cdot w_1 - 32 = 0 \qquad (II)$$

de las soluciones del sistema (I) y (II) dan los resultados del problema

$$\text{De } (2) y (1) \quad w_2 = 0,9942 \text{ KN/m}$$
$$w_1 = 0,3905 \text{ KN/m}$$

Verificación.

4t 5t

$w_1 = 0,3905$ $w_2 = 0,9942 + 0,3905$

Debe cumplir

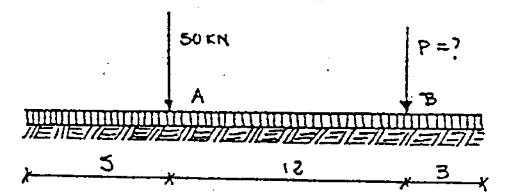
$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$\frac{0,3905 + 0,9942}{2} * 13 = 4 + 5$$

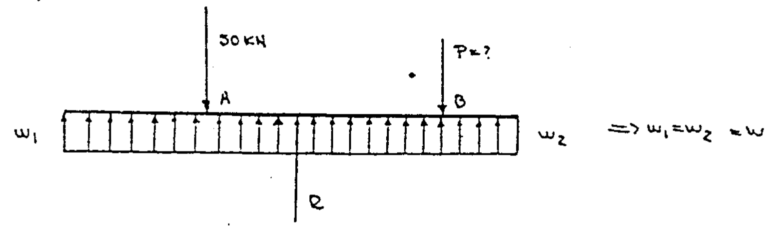
$$9,0005 \cong 9$$

Existe un error de 0,0005 debido al redondeo

Problema 4,5.- Una viga uniforme se encuentra apoyada sobre el suelo, sin considerar el peso del mismo, Determínese el valor de P para q' la tension sea uniforme.



1ra) Condición la tensión (reacción) soportada por el suelo debe ser uniforme por lo tanto:



$R = w \cdot 20$ (Resultante de la reacción en el suelo

Luego $\curvearrowright \Sigma M_A = 0$ $\quad -w \cdot 20 \cdot 5 + P \cdot 12 = 0$

$-w \cdot 100 + 12 \cdot P = 0$

$12 \cdot P - 100w = 0 \quad (I)$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad 20 \cdot w - 50 - P = 0 \quad (II)$

$\curvearrowright + \Sigma M_B \quad -50 \cdot 12 + 20 \cdot w \cdot 7 = 0 \quad (III)$

la resolución de (1) y (3) ó (1) y (2) dan los resultados pedidos

de (3) $\quad 140\,w = 600 \Longrightarrow w = \frac{600}{140} = 4,286 \text{ KN/m}$

En (1) $\quad 12P - 100 \cdot 4286 \Longrightarrow \quad P = \frac{428,60}{12} = 35,72\,[KN]$

control:

$$\boxed{P = 35,72\ [KN]}$$

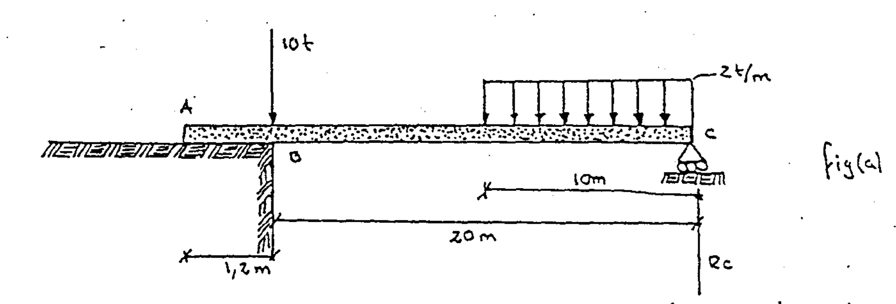
$+\uparrow \Sigma F_y = 0$

$$-4,286 * 20 + 35,72 + 50 = 0$$

$$-85,72 + 85,72 = 0$$

$$0 = 0$$

Problema 4,6 Una viga uniforme apoyada según muestra la figura, si se considera su peso propio calcular las reacciones de apoyo.



El apoyo A-B esta en una longitud, por lo tanto su reacción será, la mostrada según fig (b).

fig (b)

$$R_1 = w_1 * 1{,}20$$

$$R_2 = \frac{1}{2}(w_2 - w_1)\, 1{,}20$$

Por lo tanto, las incógnitas serán

R_1, R_2 y R_c

La resultante $R = R_1 + R_2$, se encuentra ubicado a una distancia $\bar{x}$ a partir del punto A. (Punto E)

Por otra parte la R para por E $\Rightarrow \curvearrowleft + \sum M_E = 0$

Asumiendo $\bar{x} = 0{,}7$; se tiene

$$\curvearrowleft + \sum M_E = 0 ; \quad 10 * 0{,}5 + 2 * 10 * 15{,}5 - R_c * 20{,}5 = 0$$

$$\boxed{R_c = 15{,}366\ t}$$

$$\curvearrowleft + \sum M_c = 0 ; \quad R_E * 20{,}5 - 10 * 20 - 2 * 10 * 5 = 0$$

$$\boxed{R_E = 14{,}634\ t}$$

Verificando: $+\uparrow \sum F_y = 0$; $15{,}366 + 14{,}634 = 10 + 20$

$30 = 30$ ✓

Pero: $R_1 + R_2 = R$

$$R_1 + R_2 = 14{,}634 \qquad (1)$$

R, R_1, R_2, $\bar{x} = 0{,}7$

$$14{,}634\,\bar{x} = 0{,}6\,R_1 + 0{,}8\,R_2$$

$$14{,}634 * 0{,}7 = 0{,}6\,R_1 + 0{,}8\,R_2$$

$$10{,}2438 = 0{,}6\,R_1 + 0{,}8\,R_2 \qquad (2)$$

De (1) se tiene: $R_1 = 14{,}634 - R_2$

$$10{,}2438 = 0{,}6(14{,}634 - R_2) + 0{,}8\,R_2 \Rightarrow R_2 = 7{,}317 \text{ t}$$

$$R_1 = 7{,}317 \text{ t}$$

Finalmente

A, B, C, 10, 2 t/m, W_1, W_2, $R_C = 15{,}366$ t

$$W_1 = \frac{7{,}317}{1{,}2} = 6{,}098 \text{ t/m}$$

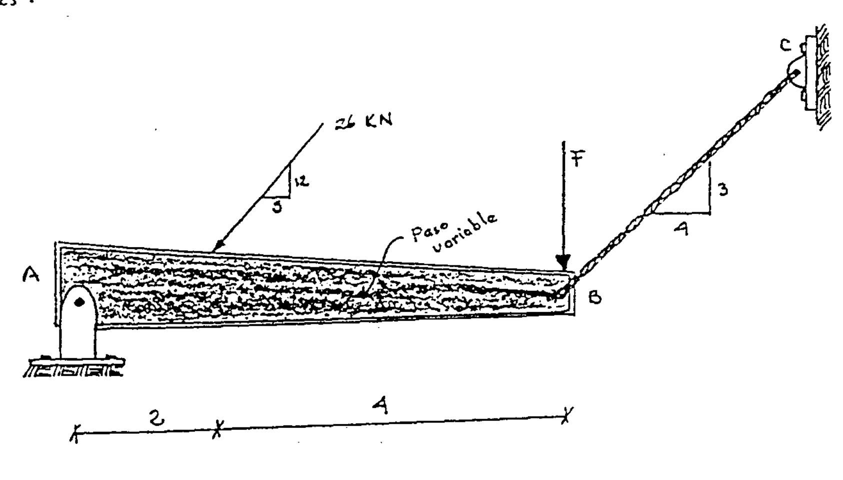
$$W_2 = 18{,}293 \text{ t/m}$$

$$10 + 20 = \frac{6{,}098 + 18{,}293}{2} \times 1{,}2 + 15{,}366 \; ; \quad 30 = 30 \checkmark$$

<u>Problema 4,7</u> El peso de la viga AB varía según muestra la figura

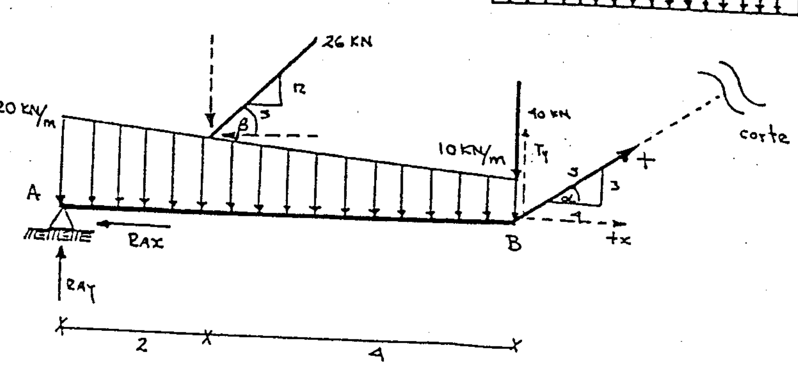
a) determinar las reacciones de apoyo mostrados según las cargas y estructura

b) Si la cuerda B–C falla cuando la tensión es de 150 KN Calcule la máxima carga F q' se puede aplicar en B; además de las reacciones.

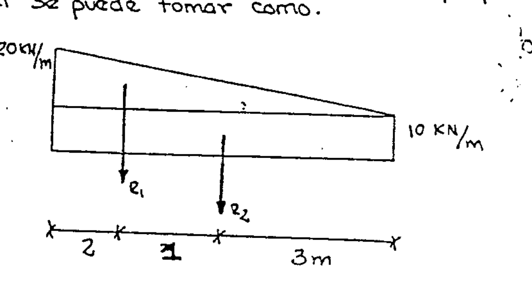


Para el inciso a) F = 40 KN peso

en forma esquemática



Se hace un corte imaginario en la cuerda; por lo tanto este será reemplazado por una fuerza T (tensión) para mantener el equilibrio en la estructura, a su vez puede descomponerse en Tx y Ty respectivamente la carga trapecial se puede tomar como.



luego: $\sum M_A = 0$

además: $R_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 = 30$ KN ; $R_2 = 6 \cdot 10 = 60$ KN

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ $\cos\beta\ \frac{5}{13}$; $\operatorname{sen}\beta\ \frac{12}{13}$

$$R_1 \cdot 2 + R_2 \cdot 3 + 26 \operatorname{sen}\beta \cdot 2 + 40 \cdot 6 - T \operatorname{sen}\alpha \cdot 6 = 0$$

$$30 \cdot 2 + 60 \cdot 3 + 26 \cdot \frac{12}{13} \cdot 2 + 40 \cdot 6 - T \cdot \frac{3}{5} \cdot 6 = 0$$

$$60 + 180 + 48 + 240 - \frac{18}{5} T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{5 \cdot 528}{18} = 146{,}67$$

$T_y = T \cdot \operatorname{sen}\alpha = 88$ KN $\qquad T_x = T\cos\alpha = 117{,}337$ KN

$\circlearrowright^{+} \Sigma M_B = 0$ $\quad R_{AY}\cdot 6 - 26\, Sen\beta \cdot 4 - R_1 \cdot 4 - R_2 \cdot 3 = 0$

$R_{AY}\cdot 6 - 24\cdot 4 - 30\cdot 4 - 60\cdot 3 = 0 \implies \boxed{R_{AY} = 66\ KN}$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \quad - R_{Ax} - 26\, Cos\beta + T\cos\alpha = 0$

$- R_{Ax} - 10 + 146,67 \cdot \frac{4}{5} = 0 \quad \boxed{R_{Ax} = 107,333\ KN}$

Esquema final.

24, 20KN/m, 40, 10, RAX, RAY, Rcx=117,33, Rcy=88

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad R_{Ay} + R_{cy} - 24 - 40 - \frac{1}{2}(20+10)6 = 0$

$66 + 88 - 24 - 40 - 90 = 0$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$

$- R_{AX} - 10 + 117,33 = 0$

$-107,33 + 117,33 = 0$

$0 = 0$

Para b) Se conoce la tensión del cable T=150 KN

26, F, T1, 150 KN, A, B, α, T2, RAX, RAY, R2, R2, 2, 4

$T_x = 150 \cos\alpha = 120\ KN$

$T_y = 150\, Sen\alpha = 90\ KN$

$\circlearrowright^{+} \Sigma M_A = 0$

$R_1\cdot 2 + 24\cdot 2 + R_2\cdot 3 + F\cdot 6 - T\cdot Sen\alpha \cdot 6 = 0$

$30\cdot 2 + 48 + 60\cdot 3 + F\cdot 6 - 150\cdot \frac{3}{5}\cdot 6 = 0$

$F = \frac{252}{6} = 42\ KN \Rightarrow \boxed{F = 42\ (KN)}$

Reacciones:

$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_B = 0 \qquad R_{AY} \cdot 6 - 30 \cdot 9 - 60 \cdot 3 - 24 \cdot 9 = 0$

$$R_{AY} = \frac{396}{6} = 66 \text{ KN}$$

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \qquad -R_{Ax} - 10 + 150 \cos\alpha = 0 \qquad R_{Ax} = 110 \text{ KN}$

control:

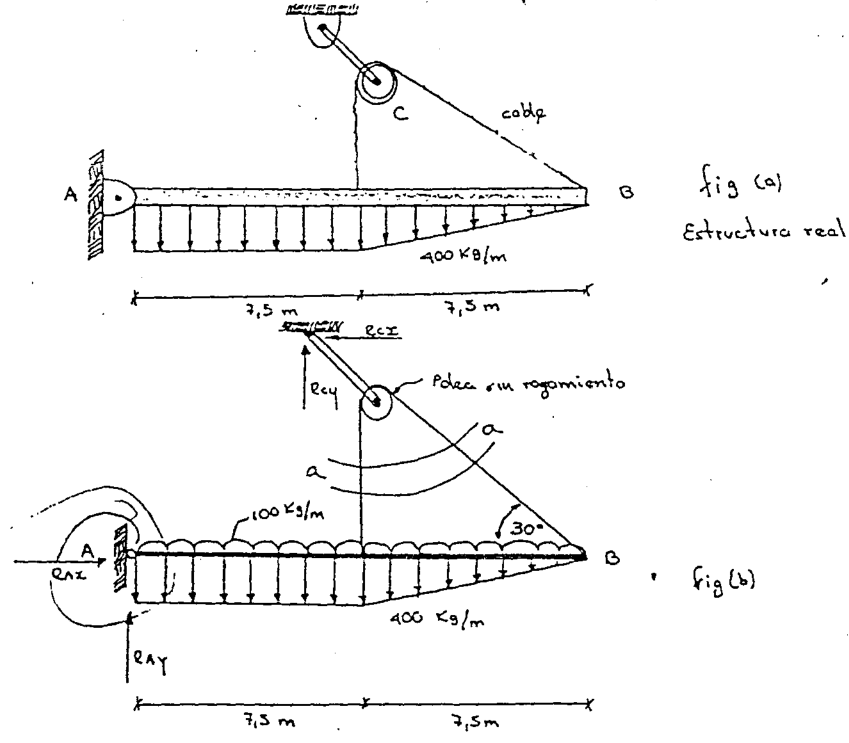
$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad -110 - 10 + 120 = 0 \qquad +\uparrow \Sigma F_y = 0; \; 66 + 90 - 24 - 42 - 30 - 60 = 0$

$$0 = 0$$

$\therefore \quad R_{Ax} = 110 \text{ KN} \qquad R_{AY} = 66 \text{ KN} \qquad R_{cx} = 120 \text{ KN}$

$R_{cY} = 90 \text{ KN} \qquad F = 42 \text{ KN}$: carga máxima que puede resistir para no romperse la cuerda.

Problema Nº 8 Una viga atirantada según muestra la figura, cuyo peso propio es de 100 Kg/m Según las cargas y estructura mostrada calcular las reacciones de apoyo y la tensión en la cuerda



Si se hace un corte en a-a se tiene la parte inferior y superior, por lo tanto

Solución

$$\overset{+}{\curvearrowright}\Sigma M_A = 0 \quad 100 \cdot \frac{15^2}{2} + 400 \cdot \frac{7{,}5^2}{2} + \frac{1}{2}\,400 \cdot 7{,}5\left(7{,}5 + \frac{7{,}5}{3}\right) - T \cdot 7{,}5 - T \cdot \operatorname{sen}30 \cdot 15 = 0$$

$$\boxed{T = 2500\ Kg}$$

$$\overset{+}{\curvearrowright}\Sigma M_B = 0 \quad R_{AY} \cdot 15 - 100 \cdot \frac{15^2}{2} - 400 \cdot 7{,}5\left(7{,}5 + \frac{7{,}5}{2}\right) - \frac{400}{2} \cdot 7{,}5\left(\frac{2}{3}\,7{,}5\right) + 7{,}5 \cdot$$

$$\boxed{R_{AY} = 2250\ Kg}$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma Fx = 0; \quad R_{AX} - T \cdot \cos 30° = 0$$

$$R_{Ax} = 2500 \cos 30° = 2165{,}06\ Kg \Rightarrow \boxed{R_{Ax} = 2165{,}06\ Kg}$$

En la parte superior:

$$\Rightarrow \boxed{R_{cx} = 2165{,}06\ (Kg.)}$$

$$\boxed{R_{cy} = 3750\ (Kg)}$$

Comprobación final

$$+\uparrow \Sigma F_Y = 0$$

$$2250 + 3750 = 160 \cdot 15 + 400 \cdot 7{,}5 + \frac{1}{2}\,400 \cdot 7{,}5$$

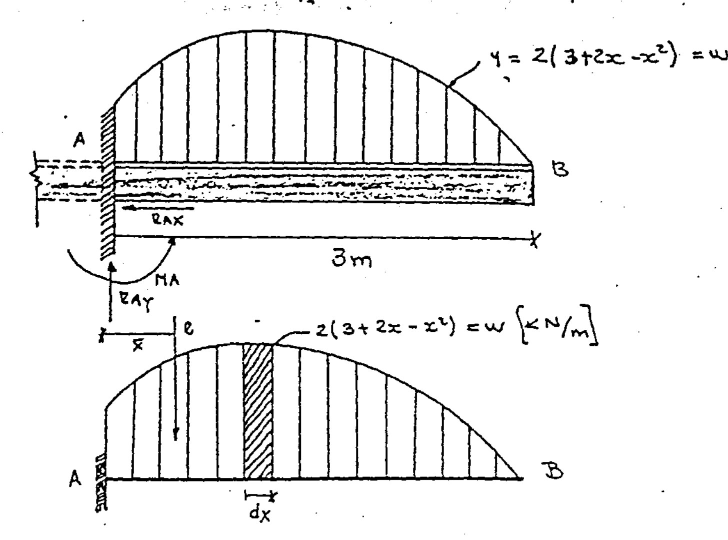
$$6000 = 6000$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_Y = 0$$

$$2165{,}06 = 2165{,}06$$

$$0 = 0$$

Problema 4.9.- la carga distribuida actúa sobre la viga como se muestra en la figura calcúlense las reacciones de apoyo.



1:) Se debe encontrar la resultante y la ubicación del mismo

$$dA = w \cdot dx \implies A = \int w\,dx$$

$$A = \int_0^3 (6+4x-2x^2)\,dx = \left[6x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^3$$

$$A = 6\cdot 3 + 2\cdot 3^2 - \frac{2\cdot 3^3}{3} = 18\,KN$$

Por lo tanto $R = A = 18\ KN \implies$ $\boxed{A = R = 18\ (KN)}$

$$R\cdot\bar{x} = \int x\,dA = \int_0^3 x\,w\,dx$$

$$R\cdot\bar{x} = \int_0^3 2x(3+2x-x^2)\,dx = \int_0^3 (6x+4x^2-2x^3)\,dx$$

$$18\cdot\bar{x} = \left[3x^2 + \frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{2}\right]_0^3 = 3\cdot 3^2 + \frac{4\cdot 3^3}{3} - \frac{3^4}{2}.$$

$18\bar{x} = 27 + 36 - 40{,}5$ $\boxed{\bar{x} = 1{,}25\ m}$ → punto donde actua la Resltante:

Luego $\Sigma M_A = 0$ $\quad -M_A + 18\cdot 1{,}25 = 0$

$$\boxed{M_A = 22{,}5\ KN\cdot m}$$

$\Sigma M_B = 0$

$R_{AY}\cdot 3 - M_A - 18(3-1{,}25) = 0 \quad -22{,}5 - 31{,}5 + R_{AY}\cdot 3 = 0$

$\boxed{R_{AY} = 18\ KN}$ y $\boxed{R_{AX} = 0}$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \qquad -R_{Ax} = 0$

$R_{Ax} = 0$

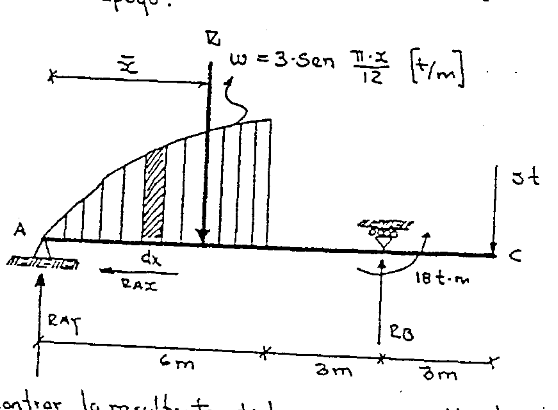
control: $\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \; ; \; R_{Ay} - 18 = 0$

$18 = 18$

$0 = 0$

<u>Problema 4.10</u> Para las cargas combinadas según la figura calcular las reacciones de apoyo.



1°) Se debe encontrar la resultante de la carga variable trigonométrica.

$\therefore \quad dA = w\,dx$ pero $w = 3\,Sen\,\frac{\pi \cdot x}{12}$ como $A = R$ (Resultante)

$A = \int_0^6 3\; Sen\,\frac{\pi \cdot x}{12}\,dx$ es de la forma $\int a\,Sen\,\frac{\pi \cdot x}{L}\,dx$

$\therefore \quad a \cdot \frac{L}{\pi}\left(-\cos\frac{\pi \cdot x}{L}\right) + C$

$A = \int_0^6 3\;Sen\,\frac{\pi \cdot x}{12}\,dx = \left[3 \cdot \frac{12}{\pi}\left(-\cos\frac{\pi \cdot x}{12}\right)\right]_0^6$

$A = \frac{36}{\pi}\left[-\cos\frac{\pi \cdot 6}{12} - \left(-\cos\frac{\pi \cdot 0}{12}\right)\right] = \frac{36}{\pi}$

$A = 11{,}46\,t = R$

ubicación

Por definición se sabe que:

$R \cdot \bar{x} = \int x\,dA$

$R \cdot \bar{x} = \int x\,w\,dx = \int_0^6 x \cdot 3\;Sen\,\frac{\pi x}{12}\,dx = \int_0^6 x\;Sen\,\frac{\pi \cdot x}{12}$

$R \cdot \bar{x} = 3\int_0^6 x\,Sen\,\frac{\pi \cdot x}{12}\,dx = \frac{3 \cdot 12^2}{\pi^2} = 43{,}771$

$\bar{x} = 3{,}82\,m$

Por lo tanto

$\curvearrowleft \sum M_A = 0$

$R \cdot x - 8 - 28 \cdot 9 + 5 \cdot 12 = 0$

$11{,}46 \cdot 3{,}82 + 52 = 28 \cdot 9 \Rightarrow RB = 10{,}64\ t$

$\curvearrowright^{+} \sum M_B = 0$

$R_{AY} \cdot 9 - 11{,}46 \cdot 5{,}18 - 8 + 5 \cdot 3 = 0 \Rightarrow R_{AY} = 5{,}82\ t$

$R_{AX} = 0$

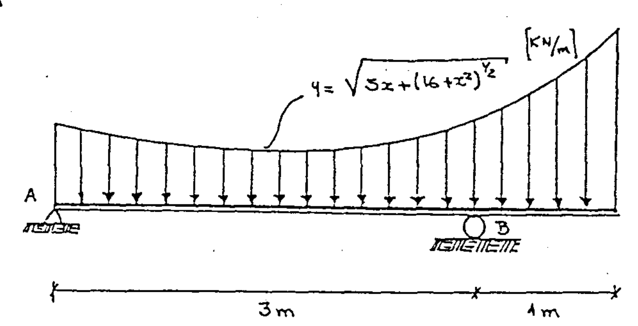
Control

$+\uparrow \sum F_y = 0$

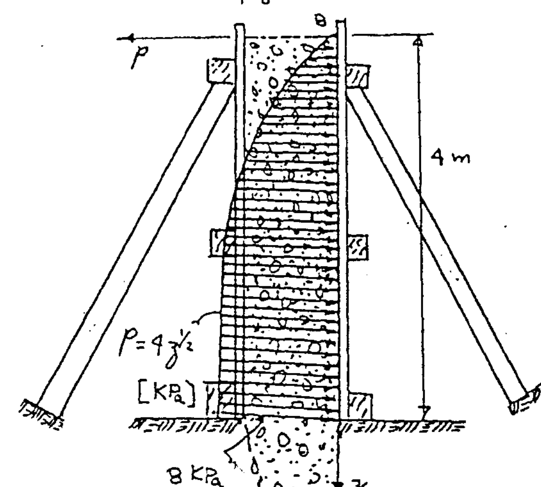
$5{,}82 + 10{,}64 - 11{,}46 - 5 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

1.- Calcular las reacciones de apoyo segun cargas y estructura mostrada en cada figura diferencial.



2.- El molde se utiliza para vaciar una pared de concreto con un ancho de 5 mts.- Determinar las reacciones en la base de la columna si la presion que ejerce el concreto fresco en la columna A-B puede darse aproximadamente como se da en la figura.



Se toma un ancho de 1 m de pared

$1\ Pa = N/m^2$

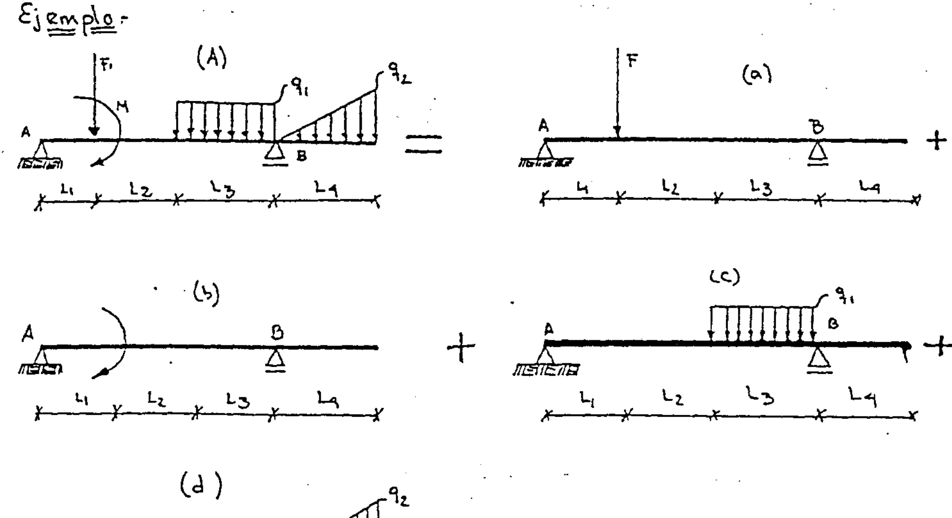
Resultante

$R = 107\ KN$

2.4 m de B

4.2. SUPERPOSICION DE EFECTOS: Cuando una estructura tiene diferentes cargas, es decir puntuales, momentos, fuerzas distribuidas, etc se puede descomponer cada una de estas en varias estructuras y cargas definidas, y finalmente sumar cada una de estos para encontrar el efecto final.

Ejemplo.-

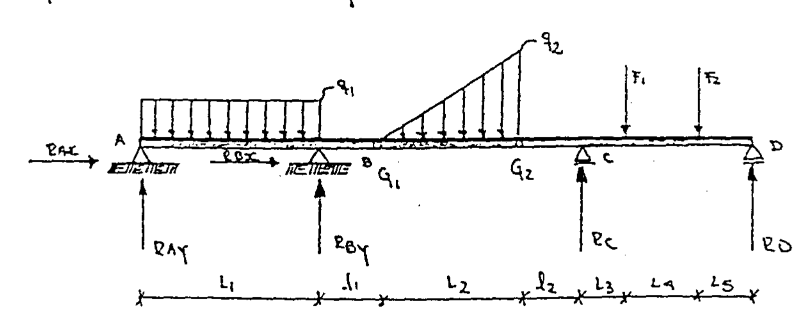


El sistema de cargas en la estructura (A) se puede descomponer en las estructuras (a), (b), (c) y (d), luego se cumple.

$$(A) = (a) + (b) + (c) + (d)$$

cuyos efectos individuales, forman el efecto total en (A).

4.3. VIGAS GERBER: Se llaman vigas Gerber a las estructuras continuas-articuladas q. tienen directa aplicación en puentes, donde por cada articulación adquiere una ecuación de condición.



El análisis estático de las vigas gerber consiste en:

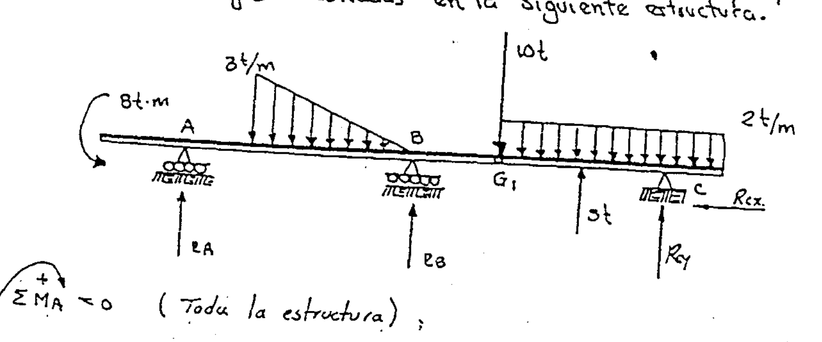
$$GE = N^o \text{ de Reacciones} - \text{Ec's de la estática} - \text{Ec's de condición}$$
$$GE = 5 - 3 - 2 = 0 \Rightarrow \text{Est. Isostática}$$

Donde: R_{Ax}, R_{Ay}, R_B, R_C, R_B incógnitas

G_1 y G_2 (Articulaciones) ⇒ Ecuaciones de condición

q_1; q_2; F_1, F_2 ⇒ Sistema de Cargas.

Su resolución.- Ejemplo 1 Calcular las reacciones de apoyo para las cargas mostradas en la siguiente estructura.



$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_A = 0$ (Toda la estructura);

$$-8 + \frac{1}{2} 9 \cdot 3 \cdot 6 - R_B \cdot 12 + 10 \cdot 16 + 2 \cdot 12 \cdot 22 \cdot 5 \cdot 2 \cdot - R_{cy} \cdot 26 = 0$$

$$12 \cdot R_B + 26 R_{cy} - 656 = 0 \quad (I)$$

$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_{G1} = 0$ (a la derecha)

$$2 \cdot 12 \cdot 6 - 5 \cdot 5 - R_{cy} \cdot 10 = 0 \Rightarrow \boxed{R_{cy} = 11,9t}$$

En (1) ⇒ $12 R_B + 26 R_{cy} - 656 = 0$

$$R_B = 28,883\,t \quad \Rightarrow \boxed{R_B = 28,883\,t}$$

$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_{G1} = 0$ (a la izquierda)

$$-8 + R_A \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 - 10 + R_B \cdot 4 = 0 \quad (III)$$

Comprobación:

$$\boxed{R_A = 1,717\,t}$$
$$\boxed{R_{cx} = 0\,t}$$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$

$$11,9 + 28,883 + 1,717 + 5 - \frac{1}{2} 9 \cdot 3 - 10 - 2 \cdot 12 = 0$$

$$47,50 - 47,50 = 0$$

$$0 = 0$$

Ejemplo N°2 Calcular las reacciones de la siguiente estructura segun cargas mostradas en la figura.

3 t/m, 2 t/m, 2 t/m, 6 tm, R_{AX}, A, B, G_1, G_2, C, D, 3, 12, 2, 8, 2, 4, 5, R_{AY}, R_B, R_C, R_D

$\circlearrowleft + \Sigma M_{G_1} = 0$ a la izquierda

* Grado estático:

$GE = Ri - E - Gi = 0$

$GE = 5 - 3 - 2 = 0$

$0 = 0$ ok!!

$$-2 \cdot 3 \cdot 15{,}5 + R_{AY} \cdot 14 - \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3 \cdot 6 + R_B \cdot 2 = 0$$

$$14 \cdot R_{AY} + 2 \cdot R_B - 201 = 0 \qquad (1)$$

$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_{G_2} = 0$

$$-2 \cdot 3 \cdot 23{,}5 + R_{AY} \cdot 22 - \frac{1}{2} 12 \cdot 3 \cdot 14 + R_B \cdot 10 - 2 \cdot 8 \cdot 4 = 0$$

$$22 \cdot R_{AY} + 10 \cdot R_B - 957 = 0 \qquad (2)$$

$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_D = 0$

$$R_{AY} \cdot 33 + R_B \cdot 21 + R_C \cdot 9 - 2 \cdot 3 \cdot 39{,}5 - \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3 \cdot 25 - 2 \cdot 8 \cdot 15 - 6 = 0 \qquad (3)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) se tiene:

$R_{AY} = 11{,}417\ t$

$R_B = 20{,}583\ t$ luego estos en la = (3) se tiene que:

$$\boxed{R_C = 10{,}444\ t}$$

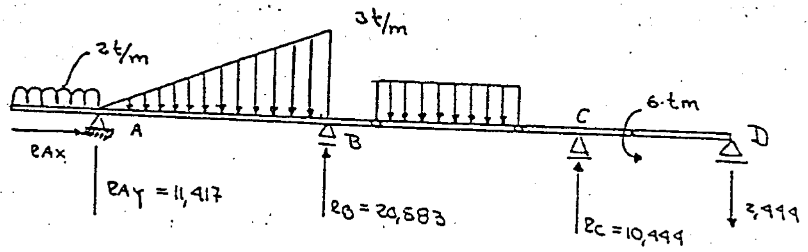
finalmente

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0$

$$-2 \cdot 3 * 1{,}5 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12 \cdot 8 - R_B \cdot 12 + 2 \cdot 8 \cdot 18 - R_C \cdot 24 - 6 - R_D * 33 = 0 \qquad (4)$$

luego $\boxed{R_D = -2{,}444\ t}$

Control:



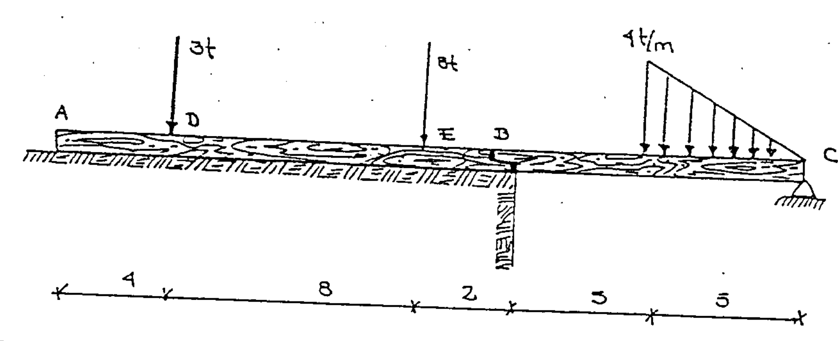
$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$11{,}417 + 20{,}583 + 10{,}444 - 2 \times 3 - \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3 - 2 \cdot 8 = 0$$

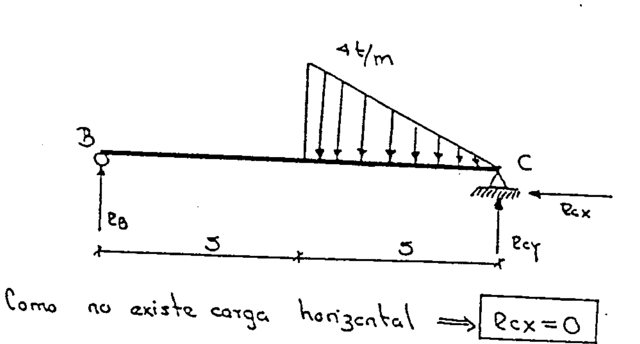
$$42{,}444 - 42{,}444 = 0$$

$$0 = 0 \quad //$$

Ejemplo N° 3 Una viga se encuentra apoyada según se muestra en la figura sin considerar su peso propio. Calcular las reacciones de apoyo.



1°) Se resuelve el tramo B-C (Se encuentra articulación en B)



Como no existe carga horizontal $\Longrightarrow$ $\boxed{R_{Cx} = 0}$

luego: $\curvearrowright^{+} \sum M_B = 0 \qquad -R_{CY} \times 10 + \frac{1}{2} 5 \cdot 4 \cdot (5 + \frac{1}{3} 5) = 0$

$$R_C = 6{,}67\,[t] \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{R_{CY} = 6{,}67\,[t]}$$

$\curvearrowright^{+} \sum M_C = 0$

$$R_B \cdot 10 - \frac{1}{2} 5 \cdot 4 \left(\frac{2}{3} \cdot 5\right) = 0 \Longrightarrow R_B = 3{,}33\,[t] \Rightarrow \boxed{R_B = 3{,}33\,[t]}$$

2°) la reacción encontrada en la articulación R_B se calcula la estructura A-B (R_B debe invertirse de sentido)

Figure labels: 3t, 8t, R_B, 3,33, A, E, B, w_1, w_2, R_1, R_2; distances 4, 8, 2.

Como se encuentra apoyada sobre el suelo, se supone q' la reacción es trapecial

las magnitudes de la reacción trapecial son w_1 y w_2 respectivamente y las resultantes son:

$$R_1 = w_1 \cdot 14 \qquad\qquad R_2 = \frac{1}{2}(w_2 - w_1) \cdot 14$$

$\therefore \quad \curvearrowright^{+} \sum M_B = 0$

$$-R_1(7-4) - R_2\left(\frac{2}{3} \cdot 14 - 4\right) + 8 \cdot 8 + 3{,}33 \times 10 = 0$$

$$-R_1 \cdot 3 - 5{,}333 \cdot R_2 + 97{,}333 = 0 \qquad (1)$$

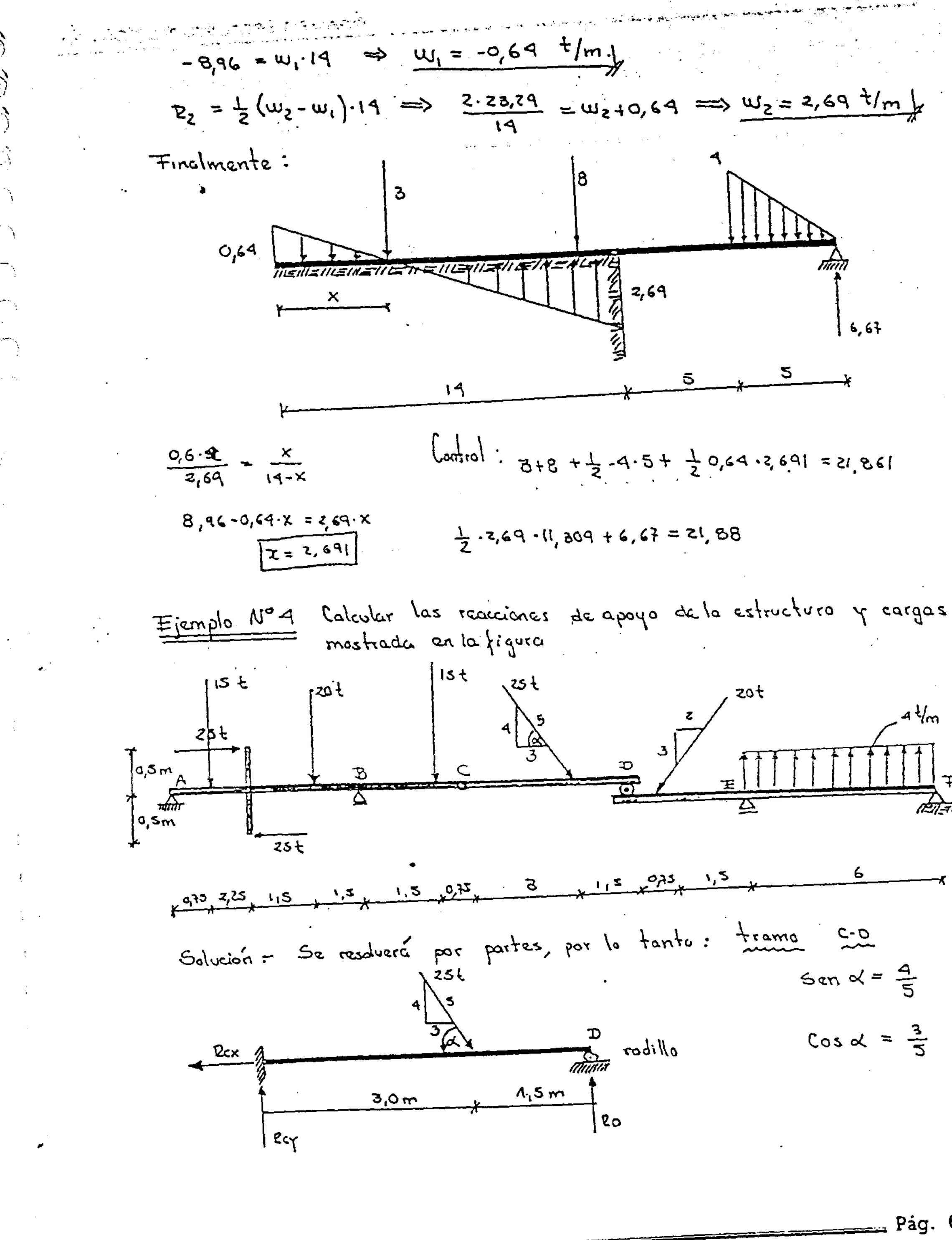
$\curvearrowright^{+} \sum M_E = 0$

$$-3 \cdot 8 + R_1 \cdot (7-2) + R_2\left(\frac{1}{3} \cdot 14 - 2\right) + 3{,}333 \cdot 2 = 0$$

$$5 \cdot R_1 + 2{,}667 \cdot R_2 - 17{,}334 = 0 \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones.

$R_2 = 23{,}29\,[t]$
$R_1 = -8{,}96\,[t]$



$$-8{,}96 = w_1 \cdot 14 \Rightarrow w_1 = -0{,}64 \ t/m$$

$$R_2 = \frac{1}{2}(w_2 - w_1)\cdot 14 \Rightarrow \frac{2 \cdot 23{,}29}{14} = w_2 + 0{,}64 \Rightarrow w_2 = 2{,}69 \ t/m$$

Finalmente:

$$\frac{0{,}64}{2{,}69} = \frac{x}{14-x}$$

$$8{,}96 - 0{,}64 \cdot x = 2{,}69 \cdot x$$

$$\boxed{x = 2{,}691}$$

Control: $3+8+\frac{1}{2}\cdot 4 \cdot 5 + \frac{1}{2}\, 0{,}64 \cdot 2{,}691 = 21{,}861$

$$\frac{1}{2}\cdot 2{,}69 \cdot 11{,}309 + 6{,}67 = 21{,}88$$

Ejemplo N° 4 Calcular las reacciones de apoyo de la estructura y cargas mostrada en la figura

Solución: Se resolverá por partes, por lo tanto: tramo C-D

$$\operatorname{Sen}\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{3}{5}$$

$\curvearrowright^{+} \sum M_C = 0 \quad 25 \cdot \text{Sen}\,\alpha \times 3 - R_D \cdot 4{,}5 = 0 \Rightarrow$

$$25 \cdot \frac{4}{5} \cdot 3 - R_D \cdot 4{,}5 = 0 \Rightarrow \quad \underline{R_D = 13{,}333\,[t]}$$

$\curvearrowright^{+} \sum M_D = 0 \quad R_{CY} \cdot 4{,}5 - 25 \cdot \text{Sen}\,\alpha \cdot 1{,}5 = 0$

$$R_{CY} \cdot 4{,}5 - 25 \cdot \frac{4}{5} \cdot 1{,}5 = 0 \Rightarrow \quad \underline{R_{CY} = 6{,}667\,[t]}$$

$\xrightarrow{+} \sum F_{(x)} = 0 \quad -R_{CX} + 25 \cdot \cos\alpha = 0$

$$-R_{CX} + 25 \cdot \frac{3}{5} = 0 \quad \underline{R_{CX} = 15\,[t]}$$

tramo A-B-C

15 t, 20[t], 15 t, 2,5 t, 0,5, 0,5, 2,5 t, A, B, C, $R_{CY} = 6{,}667$, $R_{CX} = 15$, R_{AX}, R_{AY}, R_B

0,75 — 2,25 — 1,5 — 1,5 — 1,5 — 0,75

$\curvearrowright^{+} \sum M_A = 0$

$$15 \cdot 0{,}75 + 2{,}5 \cdot 0{,}5 + 2{,}5 \cdot 0{,}5 + 20 \cdot 4{,}5 - R_B \cdot 6 + 15 \cdot 7{,}5 + 6{,}667 \cdot 8{,}25 = 0$$

$$\underline{R_B = 45{,}208\,[t]}$$

$\curvearrowright^{+} \sum M_B = 0$

$$R_{AY} \cdot 6 - 15 \cdot 5{,}25 + (2{,}5 \cdot 0{,}5) \cdot 2 - 20 \cdot 1{,}5 + 15 \cdot 1{,}5 + 6{,}667 \cdot 2{,}25 = 0$$

$$\underline{R_{AY} = 11{,}458\,t}$$

$\xrightarrow{+} \sum F_X = 0$

$$-R_{AX} + 2{,}5 - 2{,}5 + 15 = 0 \quad \underline{R_{AX} = 15\,[t]}$$

TRAMO D-E-F

$R_D = 13{,}33$, 20[t], $\sqrt{13}$, 3, 2, β, 4 t/m., E, F, R_{OX}, 0,75, 1,5, 2,25, 6,0 m, R_E, R_{FY}

$$\text{Sen}\,\beta = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$\curvearrowright^{+} \Sigma M_E = 0$

$$-13{,}333 \cdot 2{,}25 - 20 \cdot \operatorname{Sen}\beta \cdot 1{,}5 - 4 \cdot \frac{6^2}{2} - R_{FY} \cdot 6 = 0 \Rightarrow \underline{R_{FY} = -21{,}16[t]}$$

$\curvearrowright^{+} \Sigma M_F = 0$

$$-13{,}333 \cdot 8{,}25 - 20 \cdot \operatorname{Sen}\beta \cdot 7{,}5 + R_E \cdot 6 + 4 \cdot \frac{6^2}{2} = 0 \Rightarrow \underline{R_E = 27{,}132[t]}$$

$$\underline{R_{Ox} = 11{,}093[t]}$$

Control $+\uparrow \Sigma F_Y = 0$

$$R_{AY} + R_B + R_E + R_{FY} + 4 \cdot 6 = 15 + 20 + 15 + 25 \cdot \operatorname{Sen}\alpha + 20 \operatorname{sen}\beta$$

$$11{,}458 + 45{,}208 + 27{,}132 - 21{,}16 + 24 = 15 + 20 + 15 + 20 + 16{,}639$$

$$86{,}639 = 86{,}639$$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_X = 0 \quad -R_{AX} + 25 \cdot \operatorname{Cos}\alpha - 20 \cdot \operatorname{Cos}\beta + R_{OX} = 0$

$$-15 + 15 - 11{,}093 + 11{,}093 = 0$$

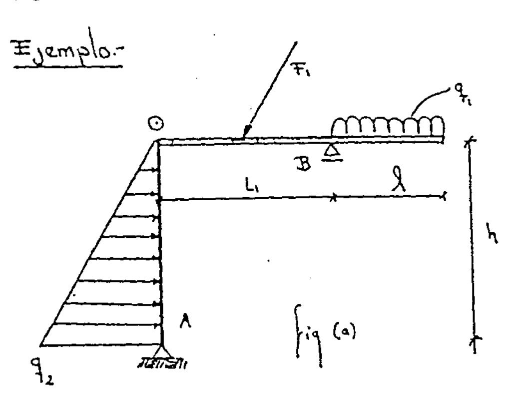
$$0 = 0 \Rightarrow OK!!$$

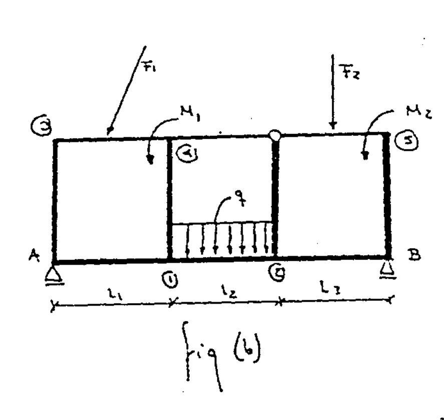
PORTICOS:-

DEFINICION:- Los llamados pórticos rígidos son estructuras cuyos elementos estan generalmente unidos entre si mediante nudos capaces de resistir todas las fuerzas, como momentos, fuerzas axiales y fuerzas transversales; por lo tanto se puede definir como:

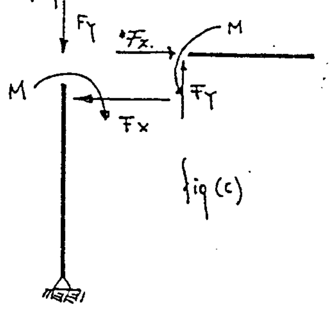
"Un pórtico rigido es una estructura compuesta por cierto número de elementos situados en un plano y unidos entre si para formar un entramado rigido por medio de nudos, algunos de los cuales, o todos ellos, son capaces de resistir momentos, en lugar de estar articulaciones o estar articuladas.

Ejemplo.-





SU DETERMINACION DEL GRADO ESTATICO :- El grado estático depende del Número de barras, nudos, Reacciones de apoyo, además del número de ecuaciones de condición. Si en la figura (a) se aisla el nudo se tiene el caso según indica la figura. (c)



El número total de incógnitas independientes es igual a la suma del número de elementos de reacción desconocida más el número total de componentes de las fuerzas interiores en las barras desconocidas.

En un pórtico con nudos rígidos, la acción de un nudo sobre una barra puede consistir en un PAR, lo mismo una FUERZA AXIAL y TRANSVERSAL; pero si se conocen estas fuerzas en el extremo de esta pieza, se puede hallar las cantidades similares en las demás reacciones

Por lo tanto, sólo hay 3 componentes de las fuerzas interiores para cada barra del pórtico, las cuales están en equilibrio estático con la siguiente barra.

Si al número de incógnitas llamamos por (R_i) y el de las barras (b) el <u>número</u> <u>total</u> <u>de</u> <u>incógnitas</u> en un pórtico rígido es igual a:

$$\# \text{ de incog: } 3 \cdot b + R_i \qquad (1)$$

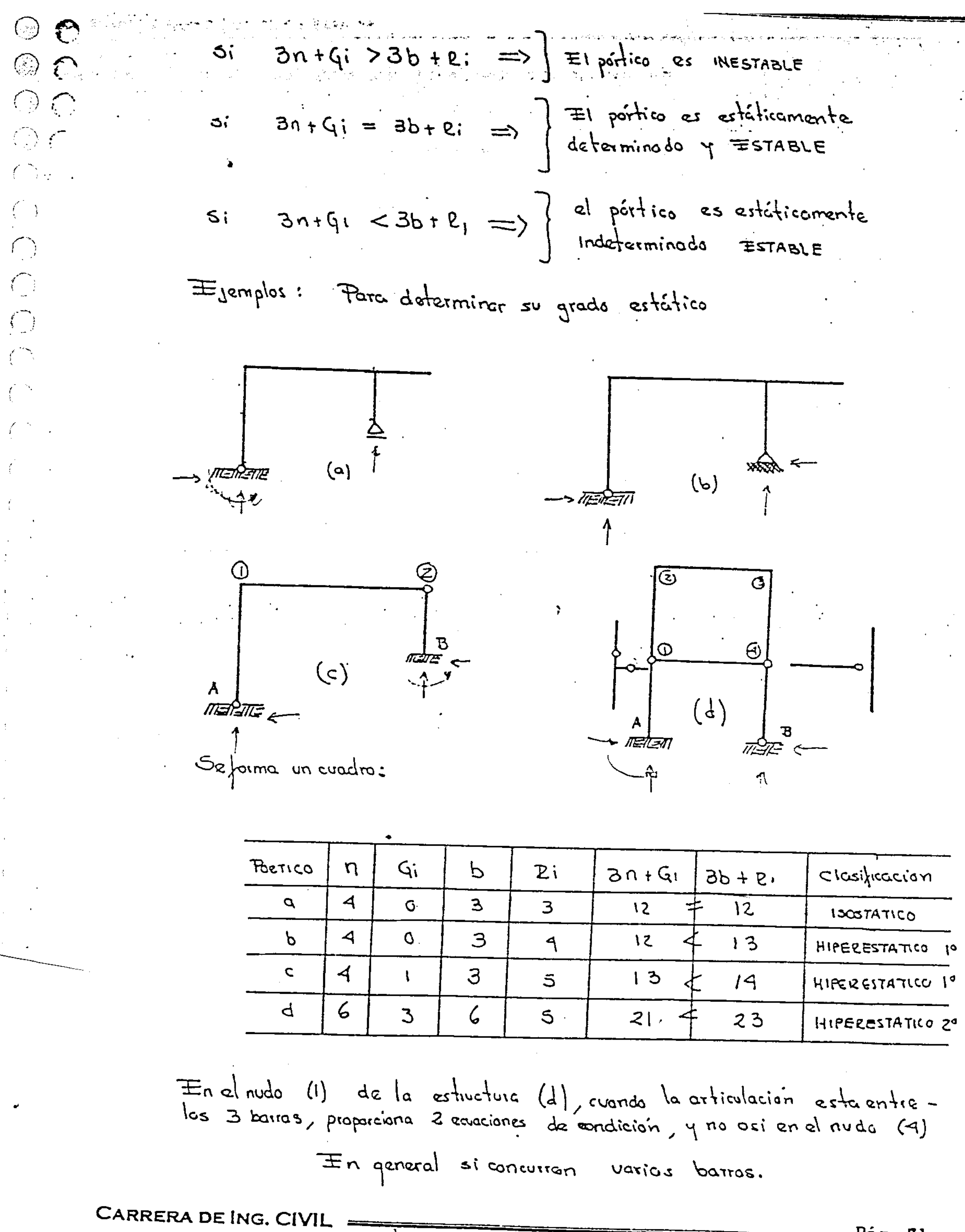
Si se aisla un nudo rígido como cuerpo libre fig (c) sobre el actuarán un sistema de fuerzas y pares, para q' exista equilibrio en este nudo, debe satisfacer a las tres ecuaciones fundamentales de la estática: estas son:

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad \Sigma F_y = 0 \quad ; \quad \Sigma M_o = 0$$

Si el pórtico en conjunto está en equilibrio lo estará también cada uno de sus nudos, si hay (n) nudos rígidos en el pórtico, por lo tanto se pueden obtener en total de $3 \cdot n$ (Ecuaciones) de equilibrio estático

A veces se introducen en la estructura articulaciones o ecuaciones especiales de condición) llamando (G_i a estas ecuaciones), se tendrán entonces: $3 \cdot n + G_i$ (2) para hallar las incógnitas

Por lo tanto, "El criterio de estabilidad de un pórtico rígido se obtiene comparando el Nº de incógnitas $3b + R_i$ con el de las ecuaciones independientes, $3 \cdot n + G_i$ entonces puede deducirse que:



si $3n + G_i > 3b + e_i \Rightarrow$ El pórtico es INESTABLE

si $3n + G_i = 3b + e_i \Rightarrow$ El pórtico es estáticamente determinado y ESTABLE

si $3n + G_i < 3b + e_i \Rightarrow$ el pórtico es estáticamente Indeterminado ESTABLE

Ejemplos: Para determinar su grado estático

Se forma un cuadro:

Portico	n	Gi	b	ei	3n + Gi	3b + ei	Clasificacion
a	4	0	3	3	12 =	12	ISOSTATICO
b	4	0	3	4	12 <	13	HIPERESTATICO 1°
c	4	1	3	5	13 <	14	HIPERESTATICO 1°
d	6	3	6	5	21 <	23	HIPERESTATICO 2°

En el nudo (1) de la estructura (d), cuando la articulación esta entre los 3 barras, proporciona 2 ecuaciones de condición, y no así en el nudo (4)

En general si concurren varios barras.

El número de ecuaciones de condición el **Nº de barras − 1**

∴ en el nudo (a) $G_i = 4$ o sea, hay 5 barras ⇒ $G_i = 4$

<u>Ejemplo Nº1</u> Determinar las reacciones de apoyo de la siguiente estructura

Su grado estático

$$3 \cdot n + G_i = 3b + e_i$$

$$3 \cdot 4 + 1 = 3 \cdot 3 + 4$$

$$13 = 13$$

ISOSTATICO → OK!!

$\overset{+}{\Sigma} M_A = 0$ (Toda la estructura)

$$-12 + \tfrac{1}{2} 10 \cdot 4 \cdot \left(\tfrac{1}{3} \cdot 10\right) - 2 \cdot 4 (2+2) - R_{BY} \cdot 8 + R_{BX} \cdot 2 = 0$$

$$-12 + 66,667 - 32 - 8 R_{BY} + 2 \cdot R_{BX} = 0$$

$$2 R_{BX} - 8 R_{BY} + 22,6667 = 0 \quad (1)$$

$\overset{+}{\Sigma} M_{G_1} = 0$ (hacia abajo)

$$2 \cdot 4 \cdot 2 - R_{BX} \cdot 4 = 0 \Rightarrow R_{BX} = 4t$$

En (1) $$2 \cdot 4 - 8 \cdot R_{BY} + 22,6667 = 0 \Rightarrow R_{BY} = 3,833 [t]$$

$\overset{+}{\Sigma} M_B = 0$ (Toda la estructura)

$$R_{AY} \cdot 8 + R_{AX} \cdot 2 - 12 - \tfrac{1}{2} 4 \cdot 10 \left(\tfrac{2}{3} \cdot 10 - 2\right) - 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0$$

$$2 \cdot R_{AX} + 8 \cdot R_{AY} - 121,33 = 0$$

$\overset{+}{\Sigma} M_{G_1} = 0$ (a la izquierda.)

$$R_{AX} \cdot 6 + R_{AY} \cdot 8 - 12 - \tfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 \left(\tfrac{2}{3} \cdot 10 - 2\right) = 0$$

$$6 R_{AX} + 8 R_{AY} - 105,333 = 0 \quad (4)$$

$$6 R_{AX} + 24 \cdot R_{AY} - 363,999 = 0$$
$$6 R_{AX} + 8 R_{AY} - 105,333 = 0$$

$$16 R_{AY} - 258,666 \Rightarrow R_{AY} = 16,167 t$$

$$R_{AX} = -4 [t]$$

Control $\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$

$$4+4-8=0$$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$

$$16{,}167 + 3{,}833 - \frac{1}{2}4 \cdot 10 = 0$$

$$20 - 20 = 0 \rightarrow \text{Cumple!!}$$

Ejemplo N°2 : Calcular las reacciones de apoyo del siguiente pórtico

1- análisis del grado estático

$3n + G_1 \quad 3b + R_1$

$3 \cdot 4 + 1 \quad 3 \cdot 3 + 4$

$13 = 13$ ISOSTATICO

2- Cálculos auxiliares

- la prolongación de las rectas de accion de R_1 y R_2 se cortan en un punto "o"

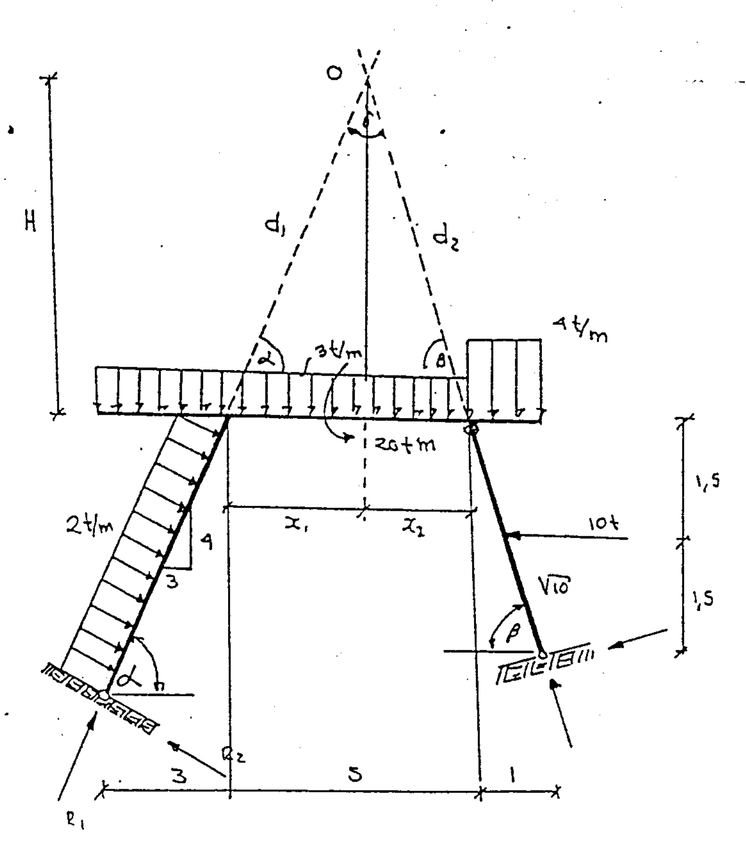
$$\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{3}{5} \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{4}{3}$$

$$\text{sen}\,\beta = \frac{3}{\sqrt{10}} \qquad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad \text{tg}\,\beta = 3$$

$$\alpha = 53{,}13°$$

$$\beta = 71{,}565°$$

$$\gamma = 180 - \alpha - \beta = \qquad \gamma = 55{,}305°$$



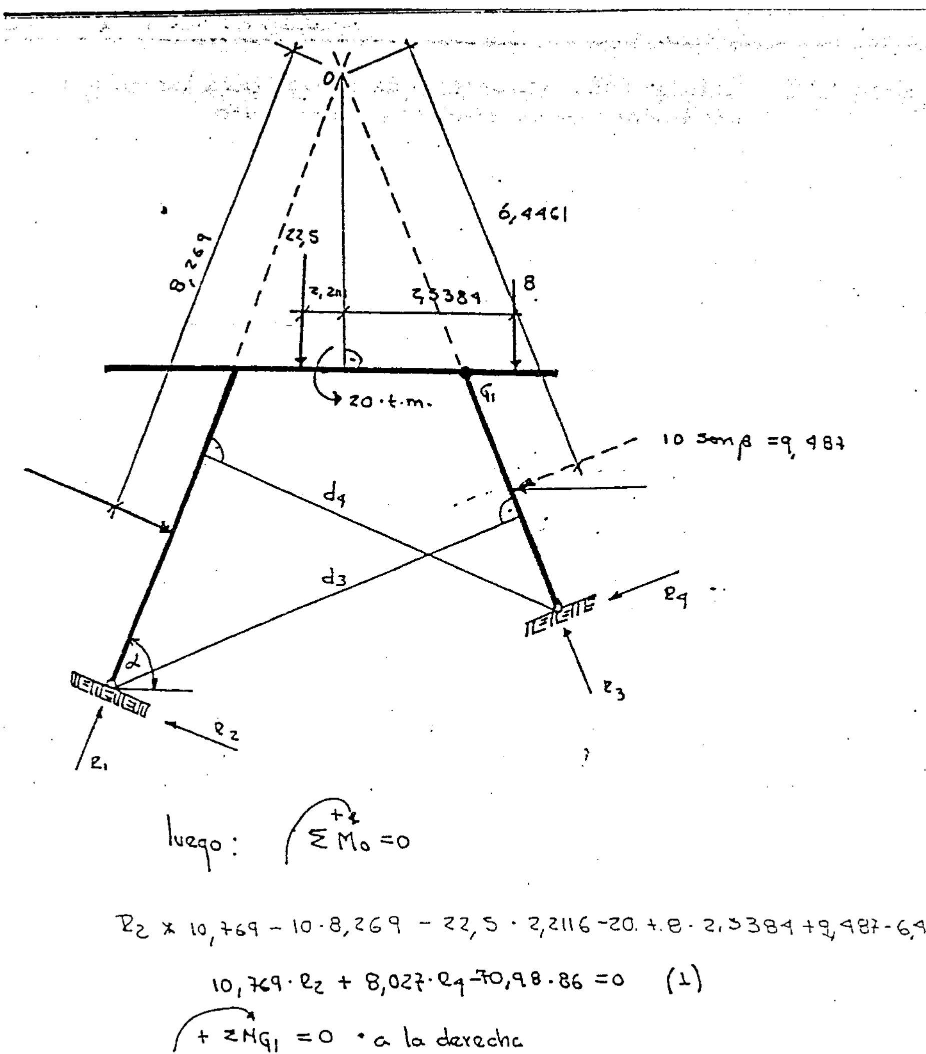
$$\frac{\operatorname{Sen}\alpha}{d_2} = \frac{\operatorname{Sen}\gamma}{5} \Rightarrow d_2 = \frac{5 \cdot \operatorname{Sen}\alpha}{\operatorname{sen}\gamma} \Rightarrow \underline{d_2 = 4{,}865 \text{ m}}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{d_1} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{5} \Rightarrow d_1 = \frac{5 \cdot \operatorname{Sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma} \Rightarrow \underline{d_1 = 5{,}769 \text{ m}}$$

$$\operatorname{Sen}\alpha = \frac{H}{d_1} \Rightarrow H = d_1 \operatorname{sen}\alpha = 5{,}769 \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow H = 4{,}6152 \text{ m}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{4{,}6152 \cdot 3}{4} \Rightarrow \underline{x_1 = 3{,}4614 \text{ m.}}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{4.6152 \cdot 1}{3} \Rightarrow \underline{x_2 = 1{,}5384 \text{ m.}}$$



luego: $\curvearrowleft^{+} \Sigma M_0 = 0$

$$R_2 \times 10{,}769 - 10 \cdot 8{,}269 - 22{,}5 \cdot 2{,}2116 - 20 \cdot t \cdot 8 \cdot 2{,}3384 + 9{,}487 \cdot 6{,}4461 + R_4 \cdot 8{,}027$$

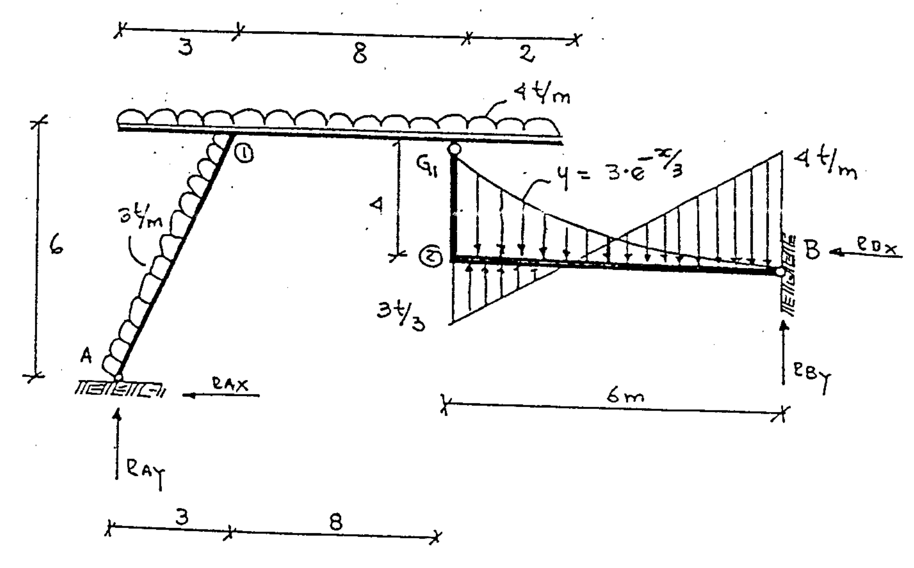
$$10{,}769 \cdot R_2 + 8{,}027 \cdot R_4 - 70{,}98 \cdot 86 = 0 \qquad (1)$$

$\curvearrowleft + \Sigma M_{G_1} = 0$ • a la derecha

$$9{,}487 \cdot 1{,}5811 + R_4 \cdot 3{,}1623 = 0$$

$R_4 = -4{,}7433$ [t]
$R_2 = 10{,}1275$ [t]

Ejemplo N° 3 Calcular las reacciones de apoyo para las cargas mostradas de la siguiente estructura.



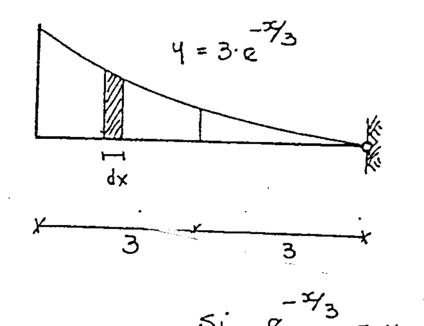
1° Su grado estático

$$3n + G_1 = 3b + R_i$$

$$3\cdot 5 + 1 = 3\cdot 4 + 4$$

$$16 = 16 \quad \text{ISOSTATICO}$$

Barra 2-B Carga variable.



$$dA = y\,dx$$

$$A = \int_0^3 3\cdot e^{-x/3}\,dx$$

$$A = 3\int_0^3 e^{-x/3}\,dx$$

$$A = 3\int_0^3 e^{ax}\,dx = 3\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)$$

Si $e^{-x/3} = u$

$$R = A = 5{,}68908\ [t]$$

$$A\cdot\bar{x} = \int_0^3 3x\cdot e^{-x/3}\,dx$$

$$\bar{x} = 1{,}254\ m$$

Resultante.

$\text{Sen}\,\alpha = \frac{6}{\sqrt{45}}$

$\text{Cos}\,\alpha = \frac{3}{\sqrt{45}}$

$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_A = 0$

$$18\cdot 3 + 9\cdot 1{,}5 + 52\cdot 6{,}5 + 5{,}689\cdot 12{,}254 - 3{,}857\cdot 11{,}857 + 6{,}858\cdot 1{,}585$$

$$-R_{BY}\cdot 17 - R_{BX}\cdot 2 = 0$$

$$-R_{BY}\cdot 17 - R_{BX}\cdot 2 = -538{,}228 \qquad (1)$$

$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_{G_1} = 0$ a la derecha.

$$-3{,}857 - 0{,}857 + 5{,}689\cdot 1{,}259 + 6{,}858\cdot 4{,}857 - R_{BY}\cdot 6 + R_{BX}\cdot 4 = 0$$

$$-R_{BY}\cdot 6 + R_{BX}\cdot 4 + 37{,}138 \qquad (2)$$

la eq. (1) multiplicando por 2

$$-34\cdot R_{BY} - 4\cdot R_{BX} + 1076{,}456 = 0$$
$$-6\, R_{BY} + 4\cdot R_{BX} + 37{,}138 = 0$$

$$-40\cdot R_{BY} \qquad + 1113{,}599 = 0$$

$R_{BY} = 27{,}84\,[t]$
$R_{BX} = 32{,}473\,[t]$

$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_B = 0$ (Toda la estructura.)

$$R_{AY}\cdot 17 + R_{AX}\cdot 2 + 18\cdot 1 - 9\cdot 15{,}5 - 52\cdot 10{,}5 - 5{,}689\cdot 4{,}746 + 3{,}857\cdot 5{,}148 - 6{,}858\cdot 1{,}19$$

$$17\cdot R_{AY} + 2\cdot R_{AX} - 682{,}502 = 0 \qquad (3)$$

$\curvearrowright^{+} \Sigma M_{G_1}$ a la izquierda.

$$R_{AY} \cdot 11 + R_{Ax} \cdot 6 - 18 \cdot 3 - 9 \cdot 9{,}5 - 52 \cdot 9{,}5 = 0$$

$$11 \cdot R_{AY} + 6 \cdot R_{Ax} - 373{,}5 = 0 \quad (4)$$

$$\left.\begin{array}{l} -51 \cdot R_{AY} - 6\, R_{Ax} + 2047{,}506 = 0 \\ 11\, R_{AY} + 6 \cdot R_{Ax} - 373{,}5 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}$$

$R_{AY} = 41{,}85\,[t]$
$R_{Ax} = 14{,}475\,[t]$

Control : $\rightarrow \Sigma F_x = 0$

$$14{,}475 + 18 - 32{,}475$$

$+\uparrow \quad \Sigma F_Y = 0$

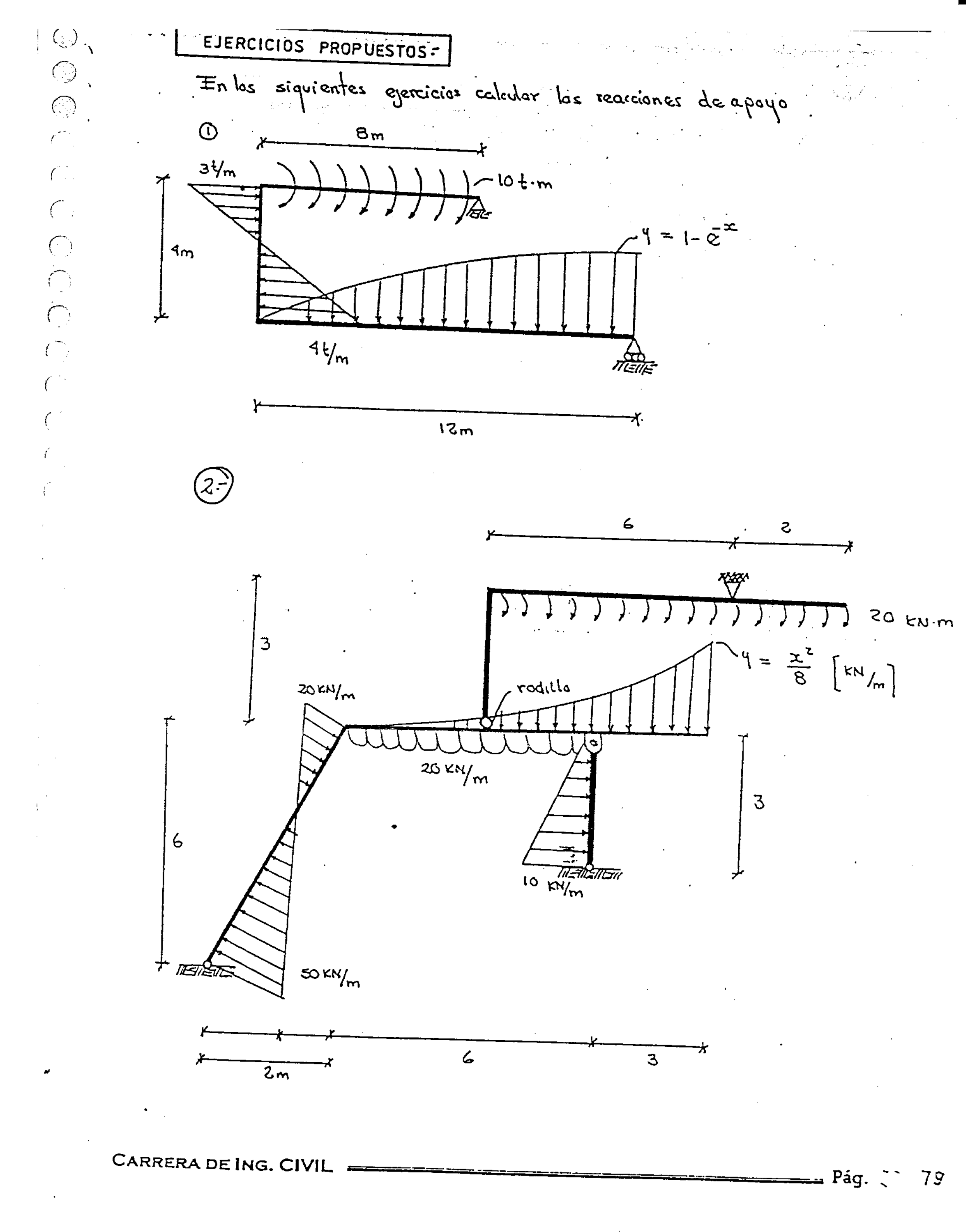
$$27{,}89 + 41{,}85 + 3{,}857 - 9 - 52 - 5{,}689 - 6{,}858 = 0$$

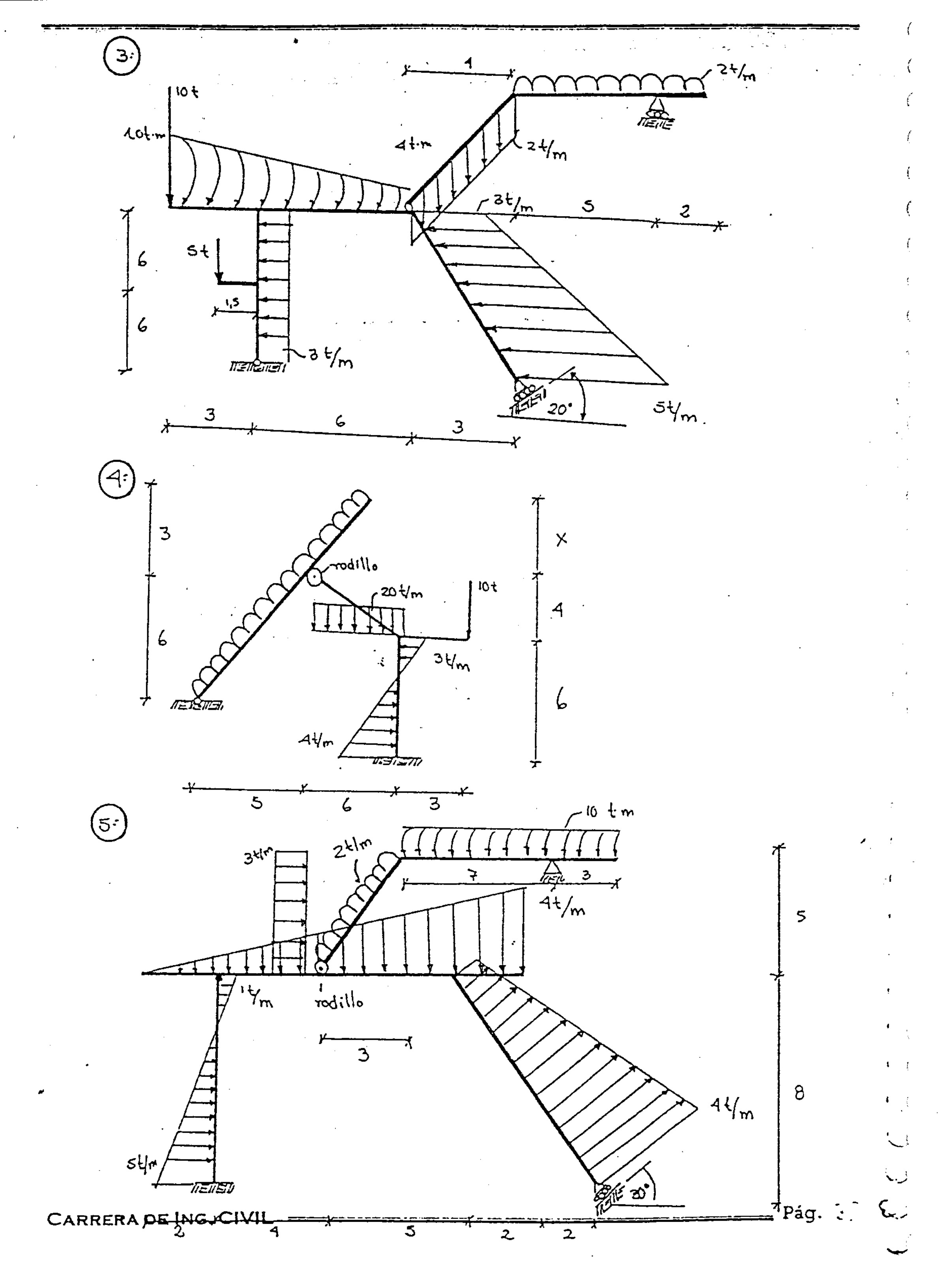
$$73{,}597 = 73{,}597$$

$$0 = 0 \;//$$ ok. Cumple!!

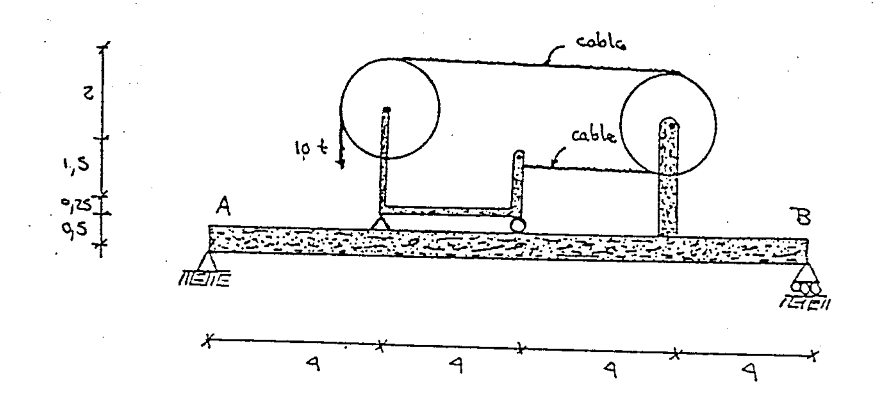
EJERCICIOS PROPUESTOS:-

En los siguientes ejercicios calcular las reacciones de apoyo.

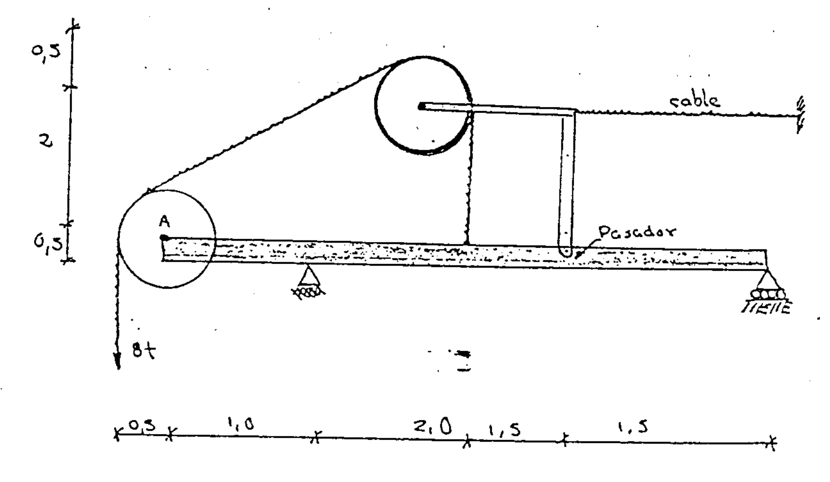



3:
10 t
10t·m
4
2t/m
4t·m
2t/m
3t/m
5
2
6
5t
6
1,5
3 t/m
20°
5t/m
3
6
3
4:
3
rodillo
20 t/m
10t
X
4
3t/m
6
6
4t/m
5
6
3
5:
10 t·m
3t/m
2t/m
7
3
4t/m
5
1t/m
rodillo
3
8
4t/m
5t/m
30°
2
4
5
2
2

(6:) la barra A-B esta apoyado tal como muestra la fig. calcular las reacciones de apoyo segun las poleas y cargas mostrados en la figura.



(7:) Si el peso propio de la viga A-B-C es de 400 Kg/m, despreciando el peso de los demás elementos, Calcular las reacciones de apoyo segun cargas y poleas mostradas en la fig.



4.- Una viga uniforme A-B de Peso q [KN/m] de longitud (L), esta suspendido por 2 cuerdas AP y AB de igual longitud Demostrar que $\theta = \text{arctsen}\left(\frac{2M}{qL^2 tg\delta}\right)$

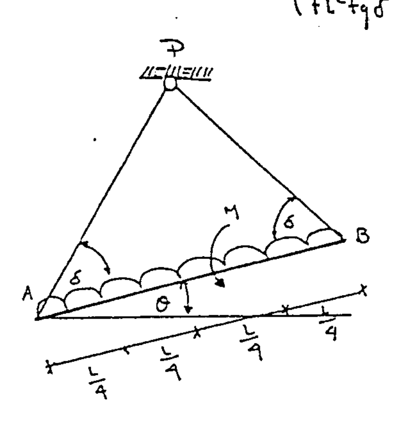
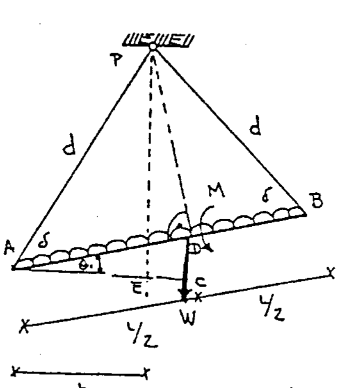


Diagrama de cuerpo libre.



Solución

W = Resultante

$w = q \cdot L$ (peso total)

$\cos\delta = \frac{L/2}{d}$

$\alpha = \frac{L}{(\cos\delta)\cdot 2}$

En el triángulo ADC se tiene

$\cos\theta = \frac{h}{\frac{L}{2}} \Rightarrow h = \frac{L}{2}\cos\theta$

$\cos(\delta+\theta) = \frac{h}{d} \Rightarrow h' = d\cdot\cos(\delta+\theta)$

$h' = \frac{L}{2\cdot\cos\delta}\cdot\cos(\delta+\theta)$

luego $\sum M_p = 0$

$W\cdot\bar{x} - M = 0 \qquad M = q\cdot L\cdot\bar{x} \qquad (I)$

pero $\bar{x} = h - h' = \frac{L}{2}\cos\theta - \frac{L}{2\cos\delta}\left[\cos(\delta+\theta)\right]$

Simplificando

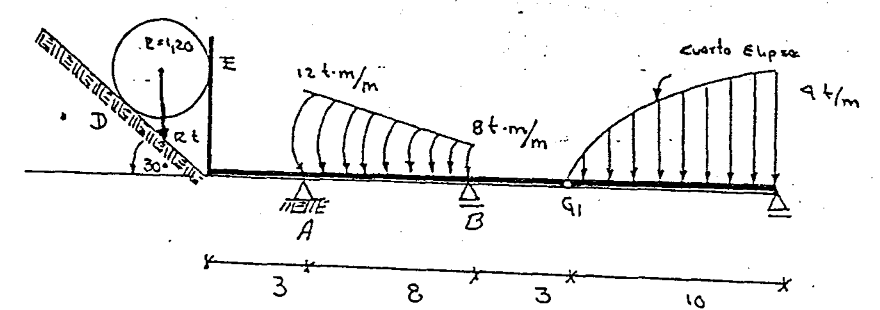
$\bar{x} = \frac{L}{2}(\text{sen}\,\theta\cdot tg\,\delta) \quad (II)$ reemplazando en (I)

$M = qL\bar{x} \qquad q\cdot L\cdot\frac{L}{2}(\text{sen}\,\theta\cdot tg\delta)$

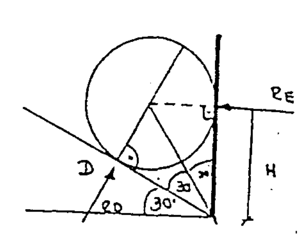
Realizando operaciones $\qquad \frac{2M}{qL^2} = \text{sen}\,\theta\cdot tg\,\delta$

$$\boxed{\theta = \text{arcsen}\left(\frac{2M}{qL^2 tg\delta}\right)}$$ lqqd.

(5:) Calcular las reacciones de apoyo de la siguiente estructura



1° En la parte izquierda de la estructura se producen reacciones en los puntos D y E



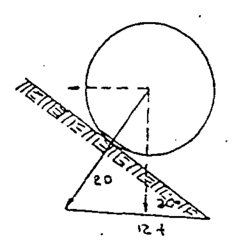
$$\operatorname{Sen} 30° = \frac{1,2}{d} \Rightarrow d = \frac{1,2}{\operatorname{Sen} 30}$$

$$d = 2,4 \text{ m}$$

$$\operatorname{Cos} 30° = \frac{H}{d} \Rightarrow H = 2,4 \cdot \operatorname{Cos} 30°$$

$$H = 2,0785$$

Descomponiendo la fuerza de 12t en ⊥ al plano



$$\operatorname{Cos} 30° = \frac{12}{R_D} \Rightarrow R_D = 13,856 \text{ t}$$

$$\operatorname{Sen} 30° = \frac{R_{Dx}}{R_D} \Rightarrow R_{Dx} = 6,928 \text{ [t]}$$

o sea:

Y, X, R_E, 6,928 t, 60°, 12t

R_{Dx}, $R_E = 6,928$, 12[t], 2,0785, 60, R_D, $R_{Dy} = 12$

$$\Rightarrow \Sigma F_x = 6,928 - R_E = 0$$

$$\Rightarrow R_E = 6,928 \text{ (t)}$$

tramo $G_1 - C$

la ecuacion de la elipse es:

(1) $$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{segun fig}$$

$$dA = y\,dx$$

de la ecuación (1)

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \qquad y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$dA = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

$$A = b\int_{-10}^{0}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

haciendo cambio de variable.

$$x = a \cdot \operatorname{sen}\theta$$
$$dx = a \cdot \cos\theta\, d\theta$$

$$A = \frac{b}{a}\int_{-10}^{0}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$A = \frac{b}{a}\int_{-10}^{0}\sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta}\;a\cos\theta\,d\theta$$

$$A = \frac{b}{a}\int\sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)}\;a\cdot\cos\theta\,d\theta$$

Pero $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$

$$A = \frac{b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{a^2\cos^2\theta}\;a\cos\theta\,d\theta = \frac{b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} a^2\cos^2\theta\,d\theta.$$

$$A = a\cdot b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2\theta\,d\theta = a\cdot b\left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta\right]_{-\pi/2}^{0}$$

$$A = a\cdot b\left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta - \left[-\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2\right]\right]\right]$$

$$A = a\cdot b\cdot\frac{\pi}{4}$$

Si $a = 10$
$b = 4.$

$$A = 10\cdot\pi$$

pero $\boxed{A = R = 31{,}416\,[t]}$

Punto de Aplicación

$$A\cdot\bar{x} = \int x\,dA$$

$$A\bar{x} = \int x\cdot y\,dx$$

$$A\bar{x} = \frac{b}{a}\int_{-10}^{0} x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

R

4 t/m

G_1

x

10

haciendo en forma general

$a=10 \quad b=4$

haciendo un cambio de variable

$$A\cdot\bar{x} = \frac{b}{a}\int_{-10}^{0} \cancel{x}\sqrt{u}\left(-\frac{du}{2\cancel{x}}\right)$$

$$a^2-x^2 = u$$

$$-2x\,dx = du$$

$$-dx = \frac{du}{2x}$$

$$A\,\bar{x} = -\frac{4}{2a}\int_{-10}^{0} u^{1/2}\,du.$$

$$A\cdot\bar{x} = -\frac{4}{20}\int_{-10}^{0} u^{1/2}\,du = -\frac{4}{20}\left[u^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\right]_{-10}^{0}$$

$$u = 10^2-x^2$$

$$A\cdot\bar{x} = -\frac{4}{20}\left[\frac{2}{3}\left(10^2-x^2\right)^{3/2}\right]_{-10}^{0}$$

$$= -\frac{4}{30}\left[\sqrt{\left(10^2-0^2\right)^3} - \sqrt{\left(10^2-(-10)^2\right)^3}\right]$$

$$31,416\,\bar{x} = -\frac{4}{30}\left[\sqrt{10^6}\right] = -\frac{4}{30}\cdot 10^3 = -\frac{400}{3} = -133,333$$

$$\bar{x} = \frac{-133,333}{31,416} = -4,244\text{ m} \;// \Rightarrow \boxed{\bar{x} = -4,244\text{ m.}}$$

Resolución del tramo G_1-C

31,416

G

C

R_{G_1Y}

R_c

4,244

10

$$\sum M_{G_1} = 0$$

$$31,416\cdot 5,756 - R_c\cdot 10 = 0$$

$$R_c = \frac{180\cdot 83}{10} = 18,08\text{ t}$$

$$\boxed{R_c = 18,083\,[t]}$$

$\Sigma M_C = 0$

$$R_{G_1Y} \cdot 10 - 31{,}416 \cdot 4{,}244 = 0 \Rightarrow R_{G_1Y} = \frac{133{,}329}{10} = 13{,}33 \ [t]$$

$$R_{G_1Y} = 13{,}333 \ [t]$$

TRAMO E - A - B - G1

6,928 — E — 2,0785 — M = 80 t·m — 13,333 — G1 — A — B — RAX — RAY — RB — 3 — 8 — 3

12 t/m — M — 8 t/m — 8

$$M = \frac{12+8}{2} * 8 = 80 \ t \cdot m$$

$M = 80 \ t \cdot m$

Punto de aplicación puede estar en cualquier parte de la estructura

$\Sigma M_A = 0$

$$6{,}928 * 2{,}0785 - 80 - R_B \cdot 8 + 13{,}333 \cdot 11 = 0$$

$$\boxed{R_B = 10{,}133 \ [t]}$$

$\Sigma M_B = 0$ $\quad R_{AY} \cdot 8 + 6{,}928 \cdot 2{,}0785 - 80 + 13{,}333 \cdot 3 = 0$

$$\boxed{R_{AY} = 3{,}2 \ [t]} \qquad \boxed{R_{AX} = 6{,}928}$$

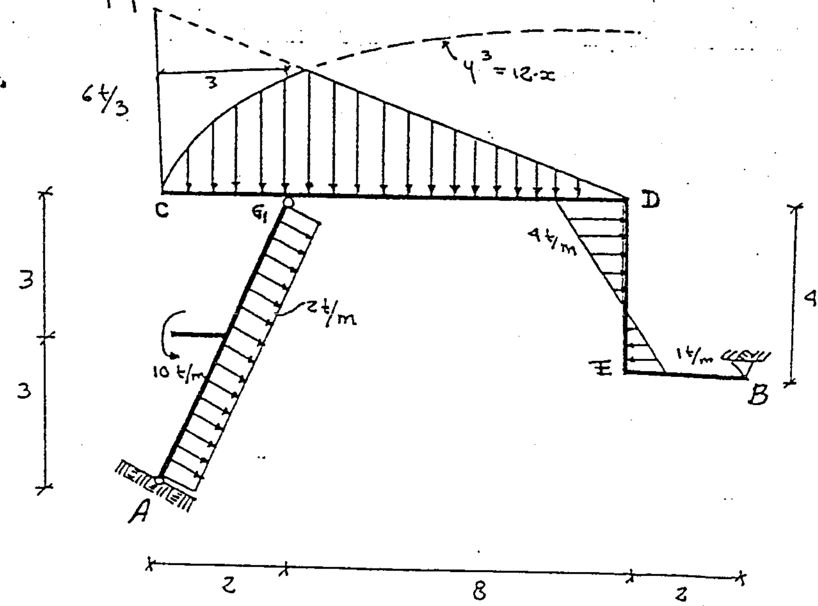
Control:

6,928 — 12 — 12 [t] — 80 — 6,928 — 3,2 — 10,133 — 18,083

$\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad 3{,}2 + 10{,}133 + 18{,}083 - 31{,}416 + 12 - 12 = 0$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \quad 6{,}928 - 6{,}928 = 0$ // OK!!

6: Calcular las reacciones de apoyo para la estructura y cargas mostradas en la figura.



– Análisis del grado estático

$$3n + G_f = 3b + R_1$$

$$3 \cdot 5 + 1 = 3 \cdot 4 + 4$$

$$16 = 16 \quad \text{ISOSTATICO}$$

– Analisis de cargas del TRAMO: C – G – D

F, y, R_1, $y^2 = 12 \cdot x$, R_2, 6 t/m, C, D, x, dx, G_1

1°) Se tiene que encontrar el punto de intersección (o) entre ambas figuras (Parábola y triangular)

Ecuación de la recta, basándose en el sistema de coordenadas x, y con centro en C.

$$\frac{6}{11} = \frac{4}{11 - x} \implies 11 \cdot y = 66 - 6 \cdot x$$

$$y = 6 - \frac{6x}{11} \quad \text{Ec. de la recta D – F}$$

la solución del sistema de $='s$ (1) y (2) dan el punto de intersección

Igualando (1) = (2) Se tiene $\sqrt[3]{12 \cdot x} = 6 - \frac{6x}{11}$

Resolviendo

$$\frac{12 \cdot x}{216} = \left(1 - \frac{x}{11}\right)^3$$

$$\frac{x}{18} = 1 - \frac{3x}{11} + \frac{3 \cdot x^2}{121} - \frac{x^3}{1331} \quad = \text{ de tercer grado}$$

Cuya raiz real es $x = 4{,}219$.

Para $x = 4{,}219 \Rightarrow y = 3{,}699$ Punto de intersección //

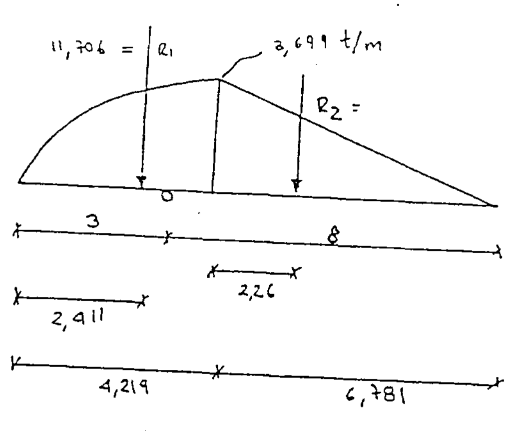
luego

$$R_1 = A_1 = \int_0^{4,219} y\,dx = \sqrt[3]{12} \int_0^{4,219} x^{1/3} dx = \sqrt[3]{12} \left[\frac{3}{4} x^{4/3}\right]_0^{4,219}$$

$$R_1 = 11{,}706 \text{ t}$$

$$A_1 \bar{x}_1 = \int_0^{4,219} x \cdot y\,dx = \int_0^{4,219} x\,(12 \cdot x)^{1/3} dx = \sqrt[3]{12} \int_0^{4,219} x^{4/3} dx$$

$$A\,\bar{x}_1 = \sqrt[3]{12} \left[\frac{3}{7} x^{7/3}\right]_0^{4,219} \Longrightarrow \bar{x}_1 = 2{,}411 \text{ m}$$



$$R_2 = \frac{1}{2}\, 3{,}699 \cdot 6{,}781 = 12{,}541 \text{ t} \Rightarrow R_2 = 12{,}541 \text{ (t)}$$

Nota: los valores de R_{1A} y R_{1B} se pueden encontrar en función del angulo de inclinación de la columna (En el apoyo A)

Tramo A-G1 (Resultantes R_3)

$R_3 = 2\cdot\sqrt{40}$ t/m

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{6}{\sqrt{40}}$; $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{40}}$

$R_{3x} = 2\cdot\sqrt{40}\cdot\frac{6}{\sqrt{40}} = 12t$

$R_{3y} = 2\sqrt{40}\cdot\frac{2}{\sqrt{40}} = 4t$

Tramo D E B (Resultante R_4 y R_5)

$\frac{4}{h} = \frac{1}{4-h} = h = 16 - 4h.$

$h = 3{,}2$ m.

$R_4 = \frac{1}{2}\ 3{,}2\cdot 4 = 6{,}4$ t

$R_5 = \frac{1}{2}\ 0{,}8\cdot 1 = 0{,}4$ t

$d_1 = 2{,}933 \quad d_2 = 0{,}267$

Resumen:

Resolución de la estructura:

$$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_A = 0$$

$$4 \cdot 1 + 12 \cdot 3 - 10 + 11{,}706 \cdot 1{,}411 + 12{,}541 \cdot 5{,}479 + 6{,}4 \cdot 4{,}933 - 0{,}4 \cdot 2{,}267 -$$

$$R_{BY} \cdot 11 - R_{Bx} \times 2 = 0$$

$$-R_{BY} \cdot 11 - R_{Bx} \cdot 2 + 145{,}893 = 0 \qquad (1)$$

$$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_{G1} = 0 \quad \text{(a la derecha y la parte superior)}$$

$$-11{,}706 \cdot 0{,}589 + 12{,}541 \cdot 3{,}479 - 6{,}4 \cdot 1{,}067 + 0{,}4 \cdot 3{,}733 - R_{BY} \cdot 9 + R_{Bx} \cdot 4 = 0$$

$$-R_{BY} \cdot 9 + R_{Bx} \cdot 4 + 31{,}399 = 0 \qquad (2)$$

de (1) y (2) se tiene

$$\boxed{R_{Bx} = 15{,}607\ [t]} \quad \boxed{R_{By} = 10{,}425\ [t]}$$

$$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_B = 0$$

$$R_{AY} \cdot 11 + R_{Ax} \cdot 2 - 4 \cdot 10 + 12 \cdot 1 - 11{,}706 \cdot 9{,}589 - 12{,}541 \cdot 5{,}521 +$$

$$+6{,}4 \cdot 2{,}933 - 0{,}4 \times 0{,}267 - 10 = 0$$

$$11 \cdot R_{AY} + 2 \cdot R_{Ax} - 200{,}824 = 0 \qquad (3)$$

$$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_{G1} = 0 \quad \text{a la izquierda}$$

$$R_{AY} \cdot 2 + R_{Ax} \cdot 6 - 10 - 4 \cdot 1 - 12 \cdot 3 = 0$$

$$2 \cdot R_{AY} + 6 \cdot R_{Ax} - 50 = 0 \qquad (4)$$

de (3) y (4) se tiene

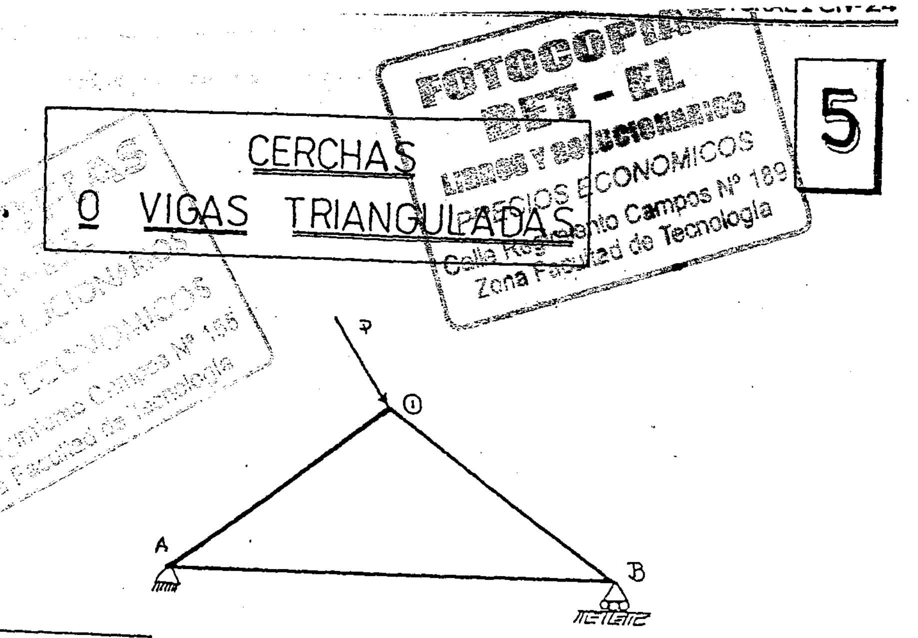
$$\boxed{R_{AY} = 17{,}822\ t} \ ; \ \boxed{R_{Ax} = 2{,}393\ t}$$

Control: $\Sigma F_x = 0 \qquad 12 + 6{,}4 - 2{,}393 - 0{,}4 - 15{,}607 = 0$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad 17{,}822 + 10{,}425 - 4 - 11{,}706 - 12{,}541 = 0$

$$0 = 0 \ // \quad \text{OK!!}$$

5 CERCHAS O VIGAS TRIANGULADAS



5.1.- DEFINICION.- Se define una cercha o viga triangulada (llamada tambien estructura reticulada.) plana, a una estructura principal compuesta por cierto número de barras, que están todas en un plano, articuladas entre si en sus extremos formando nudos de modo q' se forma un entramado rígido.

5.2. CONDICIONES.- En este tipo de estructuras deben cumplir las siguientes condiciones.

a) los barras estan unidas en sus extremos entre si por los nudos que tienen un pasador sin rozamiento.

b) los cargas y reacciones se aplican sólo en los nudos.

c) El eje de cada barra es recta, significa q' coincide con la línea q' une los centros de los nudos en cada extremo

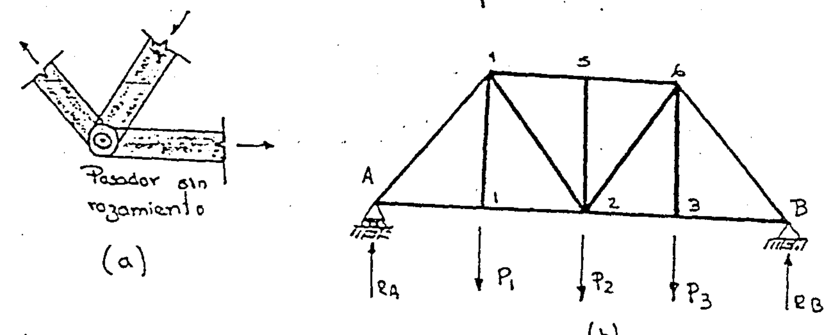
Indudablemente, es imposible q' cumpla estas condiciones una cercha real, por lo q' llamaremos cercha ideal a aquellas que cumplen ciertas condiciones enumeradas.

Bajo estas condiciones deben cumplir los 3 ecuaciones fundamentales de la estática.

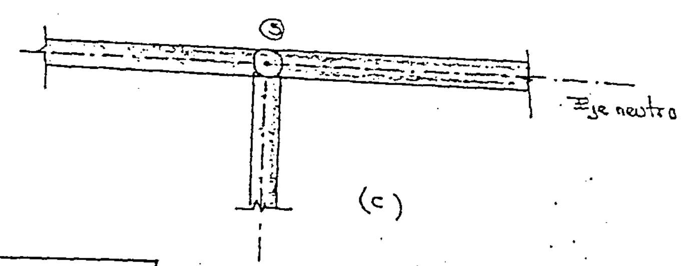
Por lo tanto :

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad \Sigma F_y = 0 \quad ; \quad \Sigma M = 0$$

gráficamente se puede resumir en los siguientes aspectos

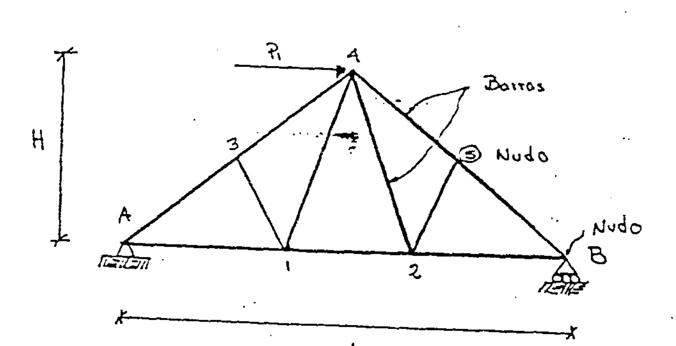


Si tomamos el nudo 5 de la fig (b), se tiene.



5.3. NOMINACION: A los puntos de apoyo se designará por las letras mayúsculas A, B, C, D, etc. a los nudos que no tienen apoyos por los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... etc.; de esta forma las barras tienen su identificación por (A-1)(A-2)... etc.

Según fig (b) anterior se tiene por ejemplo: barras A-4, 4-1 5-2, etc.



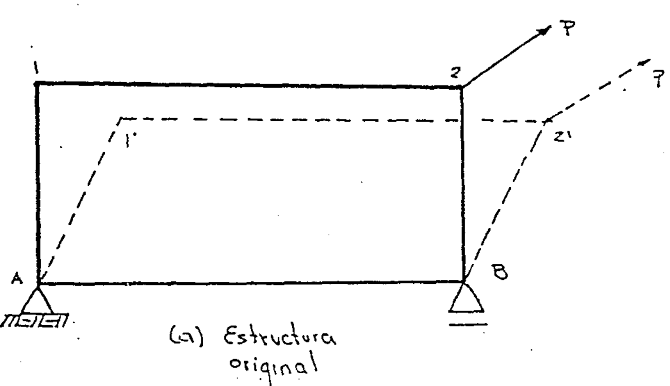
5.4. CRITERIO DE SIGNOS: En la estructura anterior por ejemplo, estará formado por un número de barras, nudos y apoyos de tal manera q' la estructura bajo efectos de carga; estas barras experimentan esfuerzos de distintos tipos por ejemplo la barra A-3 (tracción) la -

barra 3-4 tambien es tracción mientras q' la barra 4-5 y 5-B es compresión : por lo tanto

tracción (+) compresión (-)

5.5 DISPOSICION DE LAS BARRAS DE UNA CERCHA:- Se dice que una armadura es rígida, si no hay movimiento relativo entre 2 de sus partículas, aparte del causado por las pequeños deformaciones elásticas q' sufre la barra

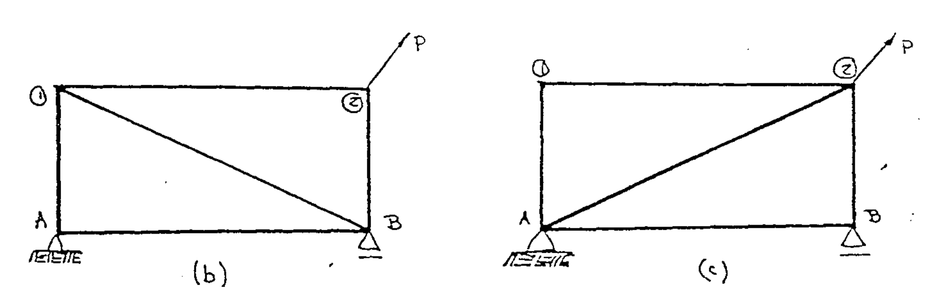
Para obtener la rigides se puede colocar una barra de diferentes modos : asi



(a) Estructura original

<u>No rígido</u>

Si no existe una barra de unión la estructura se deforma en A-1 2-B, e



(b) (c)

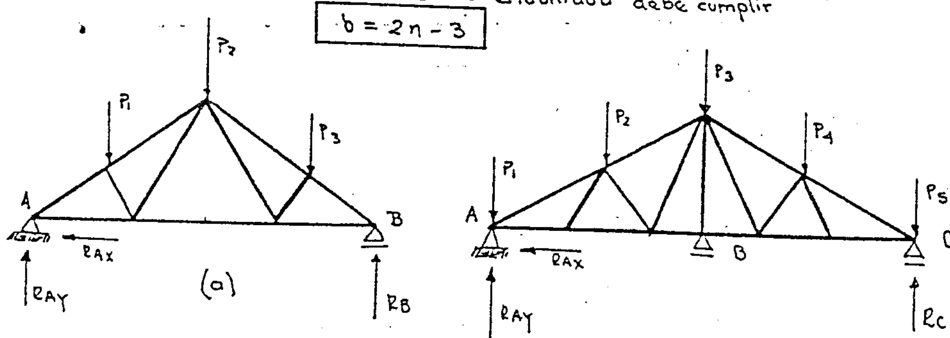
<u>Rígido</u> las estructuras (b) y (c) permanecen rígidas y estables con la incorporación de las barras (1-B) y (A-2) respectivamente

5.6. DETERMINACION DEL GRADO ESTATICO:- En este tipo de estructuras se presentan dos formas de grado estático.

a) Exterior } depende del N° de apoyos de una Estructura

b) Interior } la cantidad minima de barras para mantener la estabilidad debe cumplir

$$b = 2n - 3$$



Si se analiza la estructura (a) se tiene

1°) $GE = 3 - 3 = 0$ Estático Isostático

2°) $b = 2n - 3 = 2 \cdot 7 - 3 = 11$

$b = 11$ ES ISOSTATICO Y ESTABLE

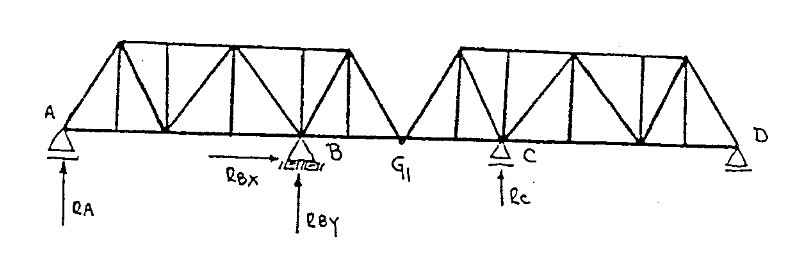
En la estructura (b) se tiene

1°) $GE = 4 - 3 = 1$ Estable Hiperestático

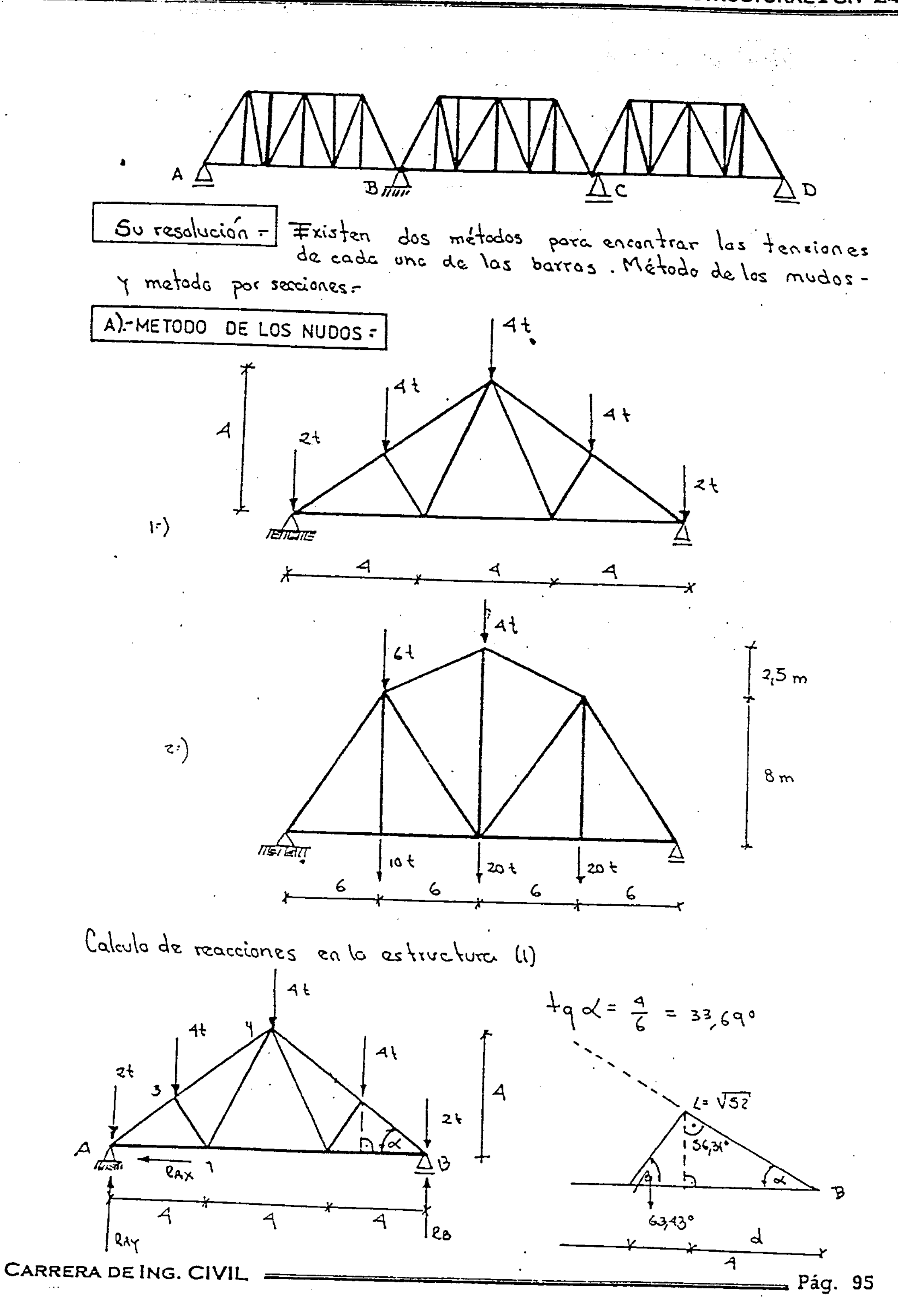
2°) $b = 2n - 3 = 2 \cdot 10 - 3 = 17$ $b = 17$

En resúmen la estructura (b) es hiperestático exteriormente e ISOSTATICO interiormente por lo tanto no se puede resolver con los conocimientos de la estática.

Consideremos otro ejemplo.



Estructura 1//



Su resolución.- Existen dos métodos para encontrar las tensiones de cada uno de las barras. Método de los nudos y metodo por secciones.-

A).- METODO DE LOS NUDOS:

Calculo de reacciones en la estructura (1)

$\curvearrowright \Sigma M_A = 0$

$4 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 9 + 2 \cdot 12 - R_B \cdot 12 = 0$

$R_B = \frac{96}{12} = 8t \Rightarrow \boxed{R_B = 8t}$

$\cos\alpha = \frac{\frac{d}{\sqrt{52}}}{2} = \frac{2d}{\sqrt{52}}$

$\curvearrowright \Sigma M_B = 0$

$d = \sqrt{52} \cdot \cos\left(\frac{33{,}69}{2}\right)$

$d = 3{,}0m$

$R_{AY} \cdot 12 - 2 \cdot 12 - 4 \cdot 9 - 4 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 0$

$R_{AY} = \frac{96}{12} = 8t \Rightarrow \boxed{R_A = 8t}$

Control $\uparrow \Sigma F_Y = 0 \quad 16 = 16$ //

Resolución por nudos

NUDO "A"

$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad 8 - 2 + F_{A3} \cdot \text{Sen}\, 33{,}69 = 0$

$\frac{6}{\text{Sen}\, 33{,}69°} = -F_{A3}$

$F_{A-3} = -10{,}817\,[t]$ Cambiar de sentido $\Rightarrow \boxed{F_{A3} = 10{,}817}$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \quad F_{A1} + F_{A3} \cdot \cos 33{,}69° = 0 \Rightarrow F_{A1} = -(-10{,}877) \cos 33{,}69$

$\boxed{F_{A1} = -9{,}0\, t}$

NUDO "3"

$\tan\theta = \frac{1}{2} \quad \theta = 26{,}565$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$

$F_{A3} \cdot \text{Sen}\,\alpha - 4 - F_{34}\,\text{Sen}\,\alpha + F_{31} \cdot \cos\theta = 0$

$$10,817 \cdot Sen\ 33,69 - 4 - F_{34} \cdot Sen\ 33,69 + F_{31} \cdot Cos\ 26,565 = 0$$

$$0,894 \cdot F_{31} - 0,555 \cdot F_{34} + 2 = 0 \quad (1)$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma Fx = 0 \qquad F_{34} \cdot Cos\alpha - F_{34} \cdot Cos\alpha - F_{31} \cdot Sen\,\theta = 0$$

$$-0,447 \cdot F_{31} - 0,832 \cdot F_{34} + 9 = 0 \quad (2)$$

la solución de (1) y (2) es el resultado

de (1) $F_{31} = \dfrac{0,555 \cdot F_{34} - 2}{0,894}$

luego en (2)

$$-0,447\left(\frac{0,555 \cdot F_{34} - 2}{0,894}\right) - 0,832 \cdot F_{34} + 9 = 0$$

$$-\frac{0,248 \cdot F_{34} + 0,894}{0,894} - 0,832 \cdot F_{34} + 9 = 0$$

$$-0,277\,F_{34} + 1 - 0,832 \cdot F_{34} + 9 = 0$$

$$-1,109 \cdot F_{34} = -10 \Rightarrow$$

$F_{34} = 9,017\ t$
$F_{31} = 3,361\ t$

NUDO 3: 4t, F_{34}, F_{3A}, F_{31}

NUDO (1): F_{13}, F_{14}, F_{1A}, F_{12}, 63,43, γ, (1)

$$tg\,\gamma = \frac{4}{2} = 63,43^\circ$$

$$+\uparrow \Sigma F_Y = 0$$

$$-F_{13} \cdot Sen\ 63,43^\circ + F_{14} \cdot Sen\ 63,43^\circ = 0$$

$$F_{14} = \frac{F_{13} \cdot Sen\ 63,43^\circ}{Sen\ 63,43^\circ} = F_{13} =$$

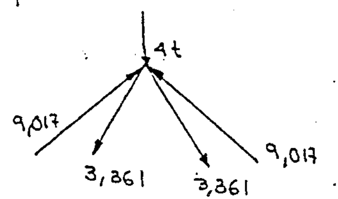
$F_{14} = 3,361\ [t]$

$\rightarrow \Sigma F_X = 0$

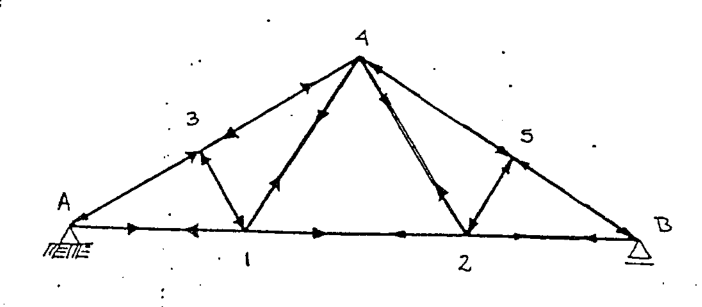
$$-F_{1A} + F_{12} + F_{13} \cdot \cos 63{,}43 + F_{14} \cdot \cos 63{,}43° = 0$$

$$-9 + F_{12} + 2 \cdot 3{,}361 \cdot \cos 63{,}43° = 0 \implies \boxed{F_{12} = 5{,}993\,[t]}$$

NUDO 4

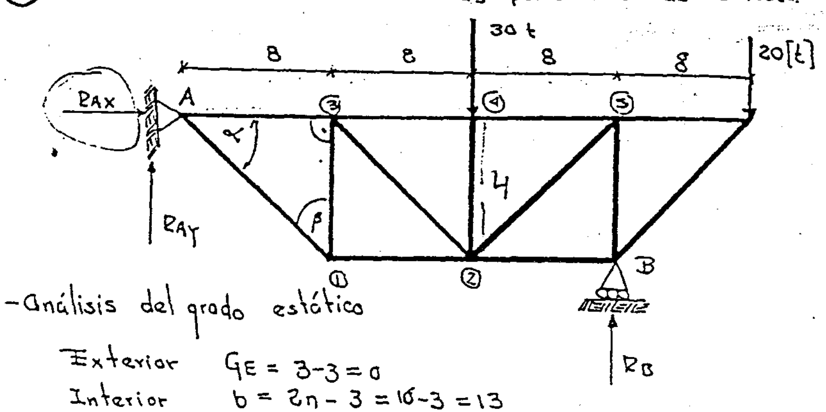


Resúmen



BARRA	(+) TRACCION	(−) COMPRESION	LONGITUD	SIMETRICO
A − 1	9	—	4	B − 2
A − 3		10,817		B − 5
1 − 3		3,361		2 − 5
3 − 4		9,017		4 − 5
1 − 4		3,361		2, 4
1 − 2	5,993	—	4	

3: Calcular las tensiones en las barras por el método de los nudos.



– Análisis del grado estático

Exterior $G_E = 3 - 3 = 0$

Interior $b = 2n - 3 = 16 - 3 = 13$

– Calculo de Reacciones

$\circlearrowright^{+} \Sigma M_A = 0 \qquad 30 \cdot 16 - R_B \cdot 24 + 20 \cdot 32 = 0$

$$R_B = \frac{1120}{24} = 46{,}667\ [t] \Rightarrow \boxed{R_B = 46{,}667\ [t]}$$

$\circlearrowright^{+} \Sigma M_B = 0 \qquad R_{Ax} \cdot 4 + R_{Ay} \cdot 24 - 30 \cdot 8 + 20 \cdot 8 = 0$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \qquad R_{Ax} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{R_{Ax} = 0\ [t]}$

$$R_{Ay} = \frac{240 - 160}{24} = 3{,}333\ [t] \Rightarrow \boxed{R_{Ay} = 3{,}333\ [t]}$$

NUDO A

(Diagrama: A, F_{A3}, α, 3,333, F_{A1})

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$

$3{,}333 + F_{A1} \cdot \operatorname{Sen}\alpha = 0$

$3{,}333 + F_{A1} \cdot \dfrac{4}{\sqrt{80}} = 0$

$$F_{A1} = -\frac{3{,}333\sqrt{80}}{4} = -7{,}453\ [t] \Rightarrow \boxed{\nwarrow F_{A1} = +7{,}453\ t}$$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4}{8} \Rightarrow \alpha = 26{,}565°$

$\operatorname{Sen}\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{80}}$

$\operatorname{Cos}\alpha = \dfrac{8}{\sqrt{80}}$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$

$F_{A3} - F_{A1} \cdot \operatorname{Cos}\alpha = 0$

$F_{A3} - 7{,}453 \cdot \dfrac{8}{\sqrt{80}} = -6{,}666\ [t] \Rightarrow \boxed{\leftarrow F_{A3} = 6{,}666\ t}$

NUDO (1)

F_{13}, F_{1A}, F_{12}, β, ①

$$Sen\beta = \frac{8}{\sqrt{80}} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{80}}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad F_{1A}\cdot\cos\beta - F_{13} = 0 \Longrightarrow 7{,}453 \cdot \frac{4}{\sqrt{80}} = F_{13} = 3{,}333\ t$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \quad -F_{1A}\cdot Sen\beta + F_{12} = 0 \Longrightarrow 7{,}453 \cdot \frac{8}{\sqrt{80}} = F_{12} = 6{,}666\ [t]$$

NUDO (3)

F_{3A}, F_{34}, F_{32}, F_{31}

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad F_{31} + F_{32}\cdot\cos\beta = 0$$

$$\Longrightarrow 3{,}333 = -F_{32}\cdot\frac{4}{\sqrt{80}} \Longrightarrow F_{32} = -7{,}453\ t$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \quad F_{3A} - F_{34} - F_{32}\cdot Sen\beta = 0$$

$$\Longrightarrow 6{,}666 - (-7{,}453)\cdot\frac{8}{\sqrt{80}} = F_{34} = 13{,}332\ [t]$$

NUDO (4)

20t, F_{43}, F_{45}, F_{24}

$$F_{24} = 20\ t$$

$$F_{45} = F_{43} = 13{,}332\ t$$

NUDO (6)

20[t], F_{65}, α, F_{6B}

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad F_{6B}\cdot Sen\alpha - 20 = 0 \quad F_{6B} = \frac{20\sqrt{80}}{40} = 44{,}72\ t$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \quad F_{6B}\cdot\cos\alpha - F_{65} = 0 \quad F_{65} = 44{,}72\cdot\frac{8}{\sqrt{80}} = 40\ t$$

NUDO (B)

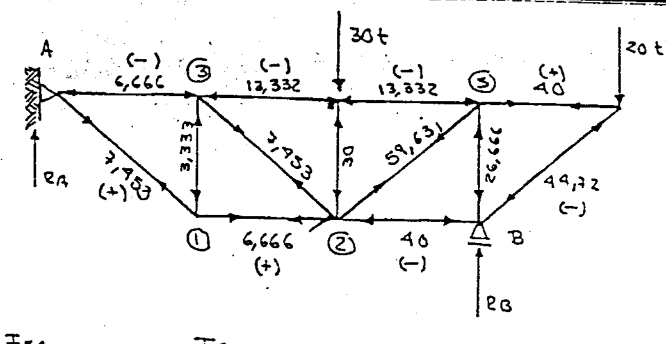
F_{5B}, F_{6B}, F_{B2}, β, Ⓑ, 46,667

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad 46{,}667 + F_{5B} - 44{,}72\cdot\frac{4}{\sqrt{80}} = 0$$

$$F_{5B} = -26{,}669$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \quad F_{B2} - 44{,}72\cdot\frac{8}{\sqrt{80}} = 0$$

$$F_{B2} = 40\ [t]$$



NUDO 5

F_{54} F_{56} F_{52} F_{53} α

$+\uparrow \sum F_y = 0$

$$26{,}668 - F_{52} \cdot \frac{4}{\sqrt{80}} = 0$$

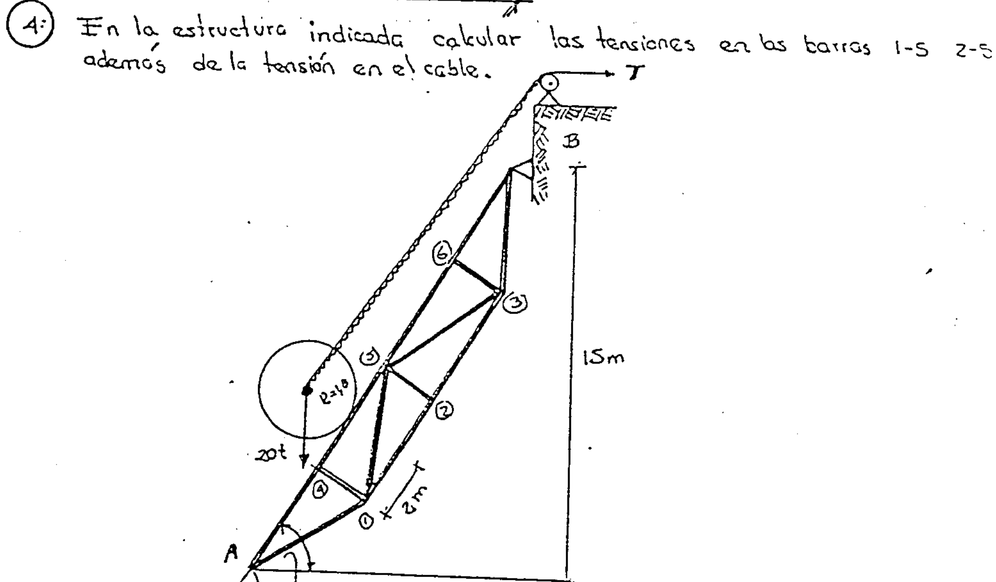
$$F_{52} = 59{,}631\ [t]$$

$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0$

$$F_{54} + 40 - F_{52} \cdot \frac{8}{\sqrt{80}} = 0$$

$$F_{54} = 13{,}332\ [t]$$

4: En la estructura indicada calcular las tensiones en las barras 1-5 2-5 además de la tensión en el cable.



Solución :

Descomponiendo la fuerza (Peso de la esfera) en las direcciones x, y y cortando la cuerda tenemos.

$$F_x = 20 \cdot \text{Sen } 48°59'$$
$$F_x = 15 \cdot \text{ton}$$

$$F_y = 20 \cdot \cos 48°59'$$
$$F_y = 13{,}229 \; t$$

tensión del cable:

$T = F_x \Longrightarrow T = 15\,t$ o sea: $T = 15[t]$

la fuerza F_y actua 2m a partir del nudo 4, se puede y debe convertir carga q' actua en los nudos: luego:

$$L = \frac{15}{\text{Sen } 48{,}59} = 20\,m$$

$\Sigma M_B = 0$ $\quad R_A \cdot L \cdot \cos\alpha - 13{,}229 \cdot 13 = 0$

$$R_A = \frac{13{,}229 \cdot 13}{20 \cdot \cos 48{,}59°} = 13\,t \qquad R_A = 13\,t$$

$\Sigma M_A = 0$ $\quad 13{,}229 \cdot 7 - R_{By} \cdot L \cdot \cos\alpha - R_{Bx} \cdot 15 = 0$

$\Sigma F_x = 0$ $\quad 13{,}229 \cdot \text{Sen}\,\alpha - R_{Bx} = 0 \qquad R_{Bx} = 9{,}9222\,t$

$$R_{By} = \frac{13{,}229 \cdot 7 - R_{Bx} \cdot 15}{L \cdot \cos\alpha} = \frac{92{,}603 - 148{,}825}{20 \cdot \cos 48{,}59} = -4{,}258\,t$$

Control: $13 - 4{,}25 - 13{,}229 \cdot \cos\alpha = 0$

$R_{By} = -4{,}25 \cdot t$ → cambiar de sentido.

Carga q' actua en los nudos

3m, 3m, 13,229, A, 5, R_5, R_4

$\Sigma M_5 = 0$

$R_4 \cdot 5 - 13{,}229 \cdot 3 = 0$

$R_4 = 7{,}937 \ t$

$\Sigma M_4 = 0$

$13{,}229 \cdot 2 - R_5 \cdot 5 = 0 \Rightarrow R_5 = 5{,}292 [t]$

luego:

x, y, $R_{Bx} = 9{,}922 \ t$, $R_{By} = 4{,}25 \ t$, 5,293 t, 7,937 t, R_x, R_{Ay}, $R_A = 13$

$R_{Ax} = 13 \cdot \operatorname{Sen}\alpha = 9{,}75 \ t$

$R_{Ay} = 13 \cdot \cos\alpha = 8{,}599 \ t$

$\operatorname{Sen}\beta = \frac{2}{\sqrt{29}}$

$\cos\beta = \frac{5}{\sqrt{29}}$

NUDO "A"

x, y, F_{A4}, F_{A1}, 9,75, 8,599

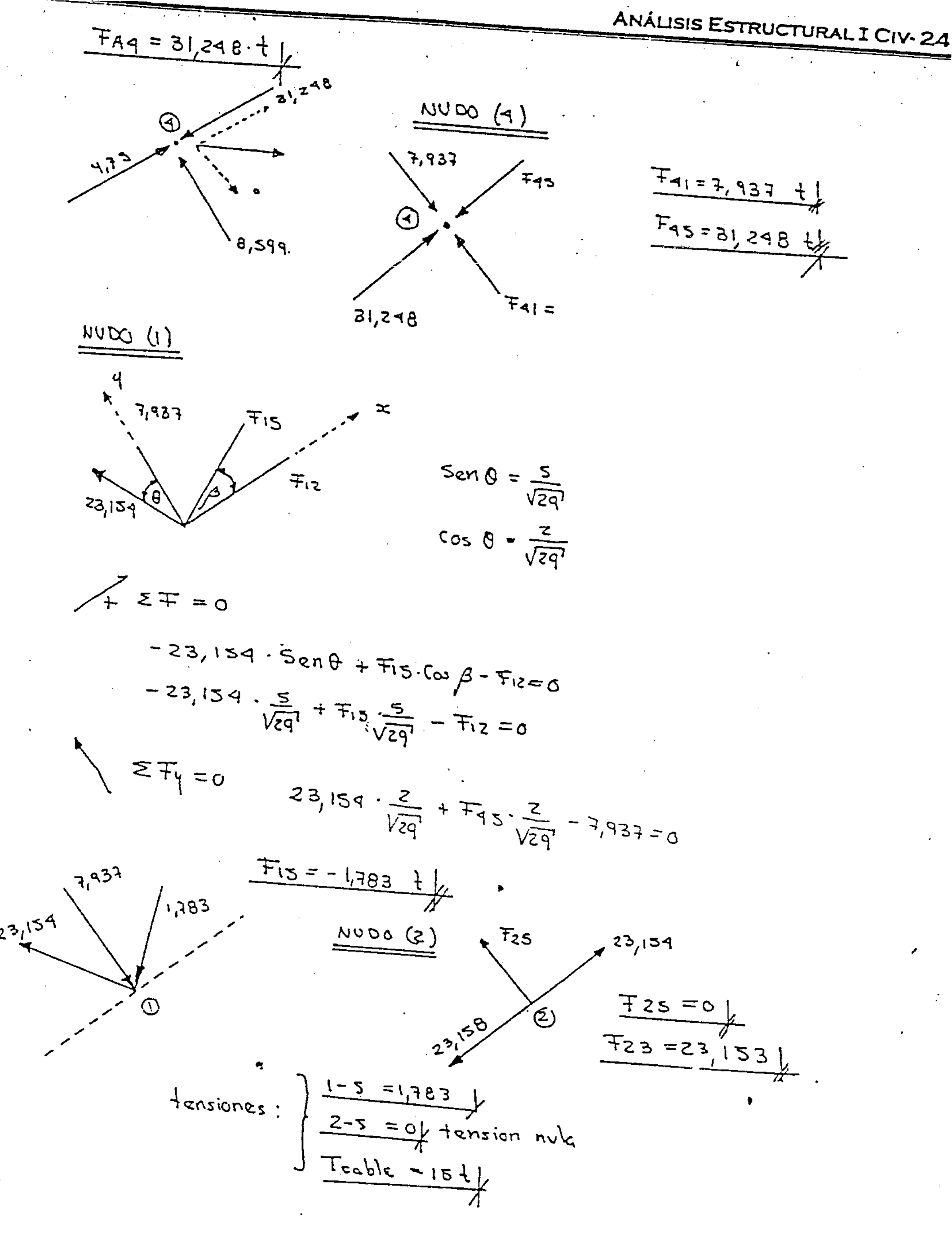
$\Sigma F_x = 0$

$9{,}75 - F_{A4} - F_{A1} \cos\beta = 0$

$\Sigma F_y = 0$

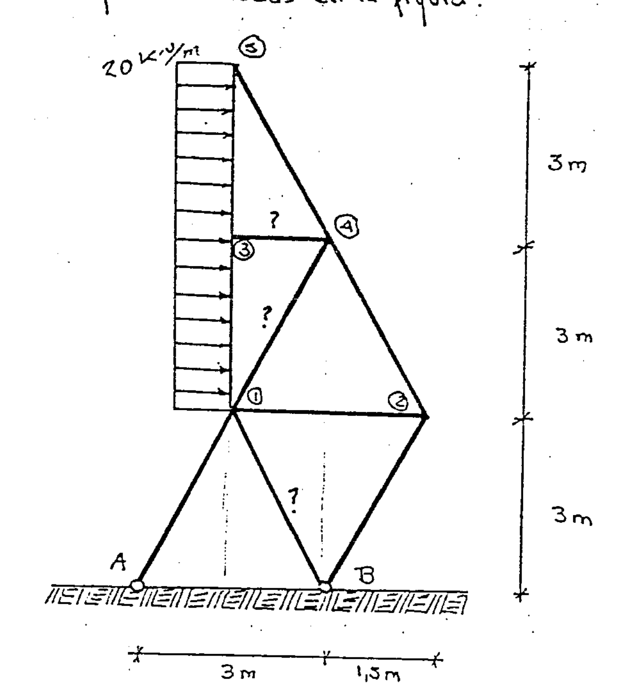
$8{,}599 + F_{A1} \cdot \operatorname{Sen}\beta = 0$

$F_{A1} = -23{,}159 [t]$



FA4 = 31,248 t
31,248
4,73
8,599
NUDO (4)
7,937
F45
F41 =
31,248
F41 = 7,937 t
F45 = 31,248 t
NUDO (1)
y
7,937
F15
x
F12
23,154
θ
β
Sen θ = 5/√29
Cos θ = 2/√29
+ ΣF = 0
- 23,154 · Sen θ + F15 · Cos β - F12 = 0
- 23,154 · 5/√29 + F15 · 5/√29 - F12 = 0
ΣFy = 0
23,154 · 2/√29 + F45 · 2/√29 - 7,937 = 0
F15 = - 1,783 t
7,937
1,783
23,154
NUDO (2)
F25
23,154
23,158
F25 = 0
F23 = 23,153
tensiones :
1-5 = 1,783
2-5 = 0 tension nula
Tcable = 15 t

(5:) Una estructura reticulada esta conformada según muestra la figura. Calcular las tensiones de los barras 3-4 1-4 1-B para las cargas mostrodas en la figura.

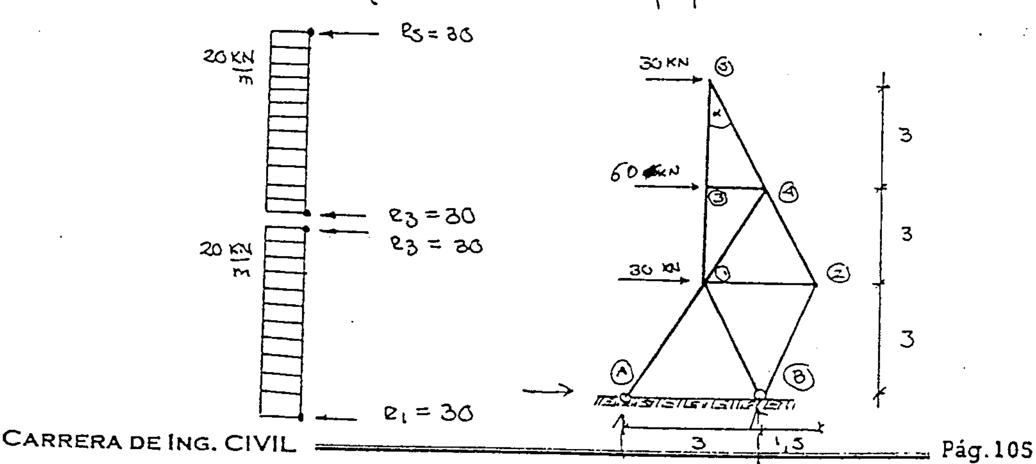


a) Análisis estático

Exterior } $GE = R_1 - 3 = 0$

Interior } $b = 2n - 3 = 2 \cdot 7 - 3 = 11$ barras
A - B se considera como barra

b) Convertir la carga distribuida en carga puntual.



$\text{Sen}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\text{sen}\,\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\text{Cos}\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\text{Cos}\,\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

NUDO (5)

F_{54}

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$

$30 - F_{54} \cdot \text{Sen}\,\alpha = 0$

$F_{54} = 30 \cdot \sqrt{5} = 67{,}082 \text{ KN}$

$F_{54} = 67{,}082 \text{ KN}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$

$F_{54} \cdot \text{Cos}\,\alpha - F_{53} = 0$

$F_{53} = 60 \text{ KN}$

NUDO (3)

60

60 KN

F_{31}

$F_{31} = 60 \text{ KN}$

$F_{34} = 60 \text{ KN}$

NUDO (4)

67,082

60

β

β

α

(4)

F_{42}

F_{41}

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$

$67{,}082 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 60 - F_{41} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - F_{42} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}(67{,}082 + F_{41} + F_{42}) = -60$

$F_{41} + F_{42} = 201{,}246 \quad (1)$

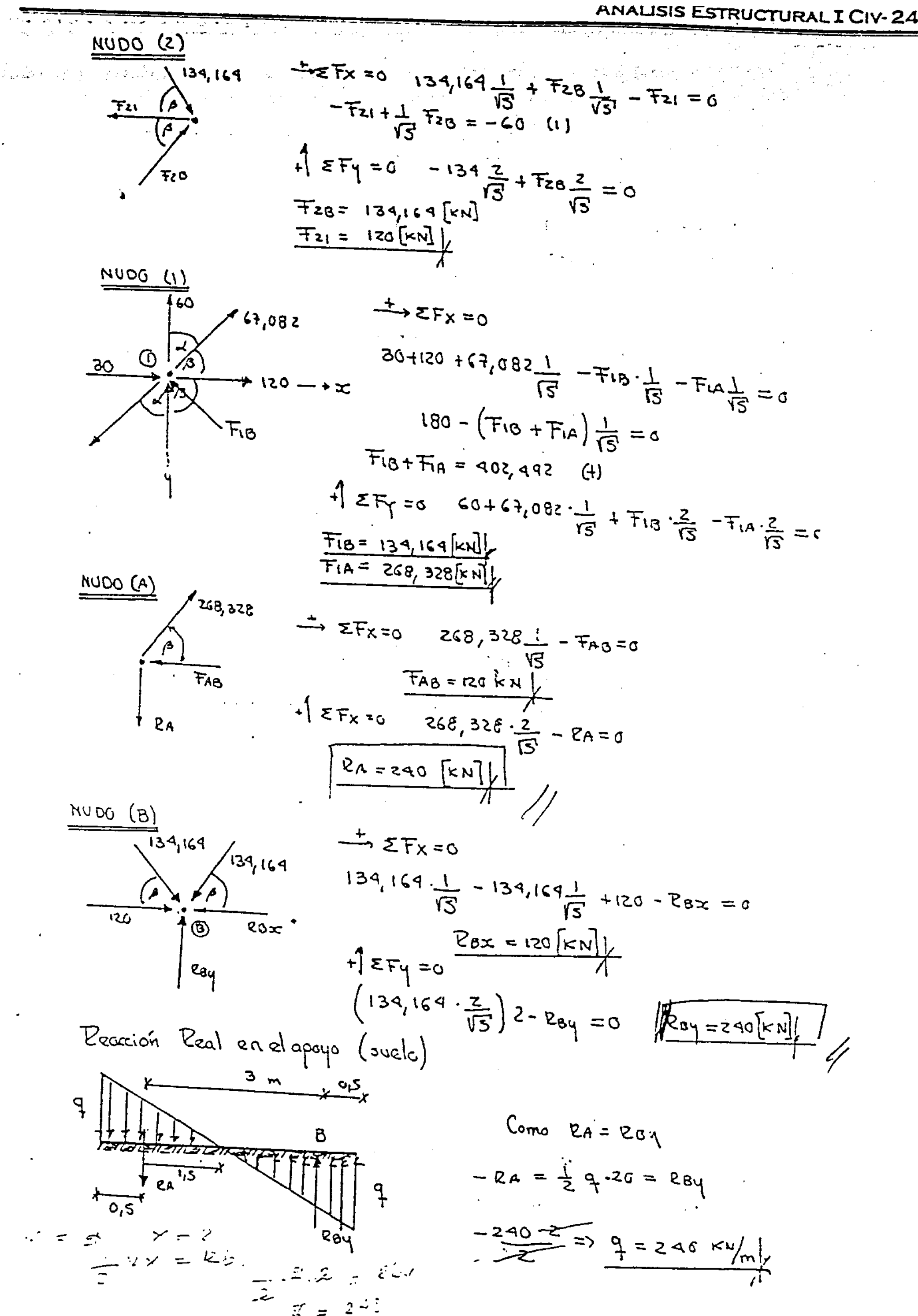
$+\uparrow \Sigma F_y = 0$

$-67{,}082 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - F_{41} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + F_{42} \frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \quad \% \frac{2}{\sqrt{5}}$

$-F_{41} + F_{42} = 67{,}082 = 0 \quad (2)$

$F_{42} = 134{,}164 \text{ [KN]}$

$F_{41} = 67{,}082 \text{ [KN]}$



NUDO (2)

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \quad 134{,}164\frac{1}{\sqrt{5}} + F_{2B}\frac{1}{\sqrt{5}} - F_{21} = 0$

$-F_{21} + \frac{1}{\sqrt{5}}F_{2B} = -60 \quad (1)$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad -134\frac{2}{\sqrt{5}} + F_{2B}\frac{2}{\sqrt{5}} = 0$

$F_{2B} = 134{,}164\,[kN]$

$F_{21} = 120\,[kN]$

NUDO (1)

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$

$30 + 120 + 67{,}082\frac{1}{\sqrt{5}} - F_{1B}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} - F_{1A}\frac{1}{\sqrt{5}} = 0$

$180 - (F_{1B} + F_{1A})\frac{1}{\sqrt{5}} = 0$

$F_{1B} + F_{1A} = 402{,}492 \quad (4)$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad 60 + 67{,}082\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + F_{1B}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - F_{1A}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = 0$

$F_{1B} = 134{,}164\,[kN]$

$F_{1A} = 268{,}328\,[kN]$

NUDO (A)

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \quad 268{,}328\frac{1}{\sqrt{5}} - F_{AB} = 0$

$F_{AB} = 120\ kN$

$+\uparrow \Sigma F_x = 0 \quad 268{,}328\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - R_A = 0$

$R_A = 240\,[kN]$

NUDO (B)

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$

$134{,}164\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} - 134{,}164\frac{1}{\sqrt{5}} + 120 - R_{Bx} = 0$

$R_{Bx} = 120\,[kN]$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$

$\left(134{,}164\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right)2 - R_{By} = 0 \qquad R_{By} = 240\,[kN]$

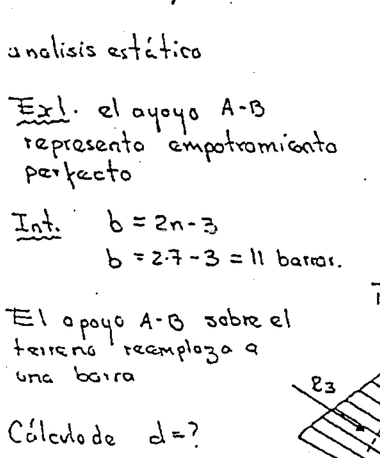
Reacción Real en el apoyo (suelo)

Como $R_A = R_{By}$

$- R_A = \frac{1}{2}q\cdot 2{,}0 = R_{By}$

$\frac{240\cdot 2}{2} \Rightarrow q = 240\ kN/m$

(6:) Las cargas mostradas en la estructura representan las presiones ejercidas debido al relleno de tierra q'actuan en la presa A-B-5 de la estructura reticulada, calcular las tensiones en las barras



análisis estático

Ext. el apoyo A-B representa empotramiento perfecto

Int. $b = 2n-3$

$b = 2\cdot7-3 = 11$ barras.

El apoyo A-B sobre el terreno reemplaza a una barra

Cálculo de $d=?$

Presión en el punto A por concepto de Presiones será $d =$ presión en "C"

$$\frac{10}{8} = \frac{d}{12} \Rightarrow d = \frac{10\cdot12}{8} = 15\ KN/m$$

Calculo de resultantes R_i:

$R_1 = \frac{1}{2}\, 10\cdot 8 = 40$ [KN]

$R_2 = 10\cdot\sqrt{20} = 44{,}721$ [KN]

$R_3 = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\sqrt{20} = 11{,}180$ [KN]

$R_2 = \frac{1}{2}\ (3)\ (\sqrt{20})$

$R_3 = \frac{1}{2}\ (d-10)(\sqrt{20})$

$\Sigma M_A = 0$

$40\cdot 6{,}667 + 44{,}721 * 2{,}236 + 11{,}18\cdot 1{,}491 - R_{By}\cdot 4 = 0$

$R_{By} = 95{,}837$ [KN]

Para hacer momentos en el punto B se debe encontrar las componentes R_x y R_y de las fuerzas R_2 y R_3 respectivamente

Luego $\Sigma M_B = 0$

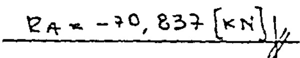
$\operatorname{Sen}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$40\cdot 6{,}667 + 10\frac{4}{3} +$

$40\cdot 2 - 5\cdot 3{,}33 - 20\cdot 3 +$

$R_A\cdot 4 = 0$



$R_A = -70{,}837$ [KN]

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$

$40 + 10 + 40 - R_{Bx} = 0 \quad \Longrightarrow \quad R_{Bx} = 90\,[KN]$

la verdadera reaccion en el piso será.

R_A ; x ; x ; $4-x$; q_1 ; B ; A ; $\frac{x}{2}$; q_2 ; R_B ; $\frac{4-x}{2}$

$R_A = 70{,}837$ KN

$R_{By} = 95{,}837$ KN

Según la fig:

$$70{,}837 = \frac{1}{2} q\left(x + \frac{x}{2}\right) \quad (1)$$

$$95{,}837 = \frac{1}{2} q_2\left(4 - x + \frac{4-x}{2}\right)$$

además:

$$\frac{q_1}{x + \frac{x}{2}} = \frac{q_2}{4 - x + \frac{4-x}{2}} \quad (3)$$

$$\Longrightarrow \frac{2q_1}{3x} = \frac{2q_2}{12-3x} \Longrightarrow \frac{q_1}{3x} = \frac{q_2}{12-3x}$$

De (1)

$$\frac{2 \cdot 70{,}837}{x + \frac{x}{2}} = q_1 \Longrightarrow q_1 = \frac{283{,}348}{3x}$$

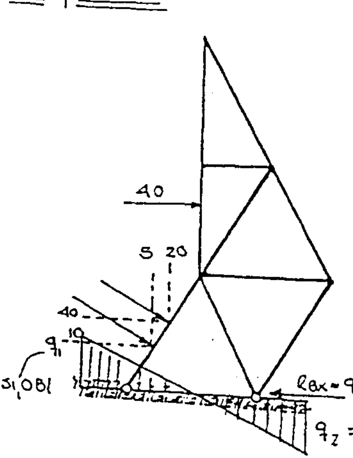
De (2) $$\frac{2 \cdot 95{,}837 \cdot 2}{12 - 3x} = q_2 \Rightarrow q_2 = \frac{383{,}348}{12-3x}$$

En (3) $$\frac{283{,}348}{(3x)^2} = \frac{383{,}348}{(12-3x)^2} \qquad X^2 + 22{,}668 \cdot x - 45\,336 = 0$$

Para lo cual: $x = 1{,}849$ m $\qquad q_1 = 51{,}081$ KN/m

$q_2 = 59{,}406$ KN/m

Comprobación.-



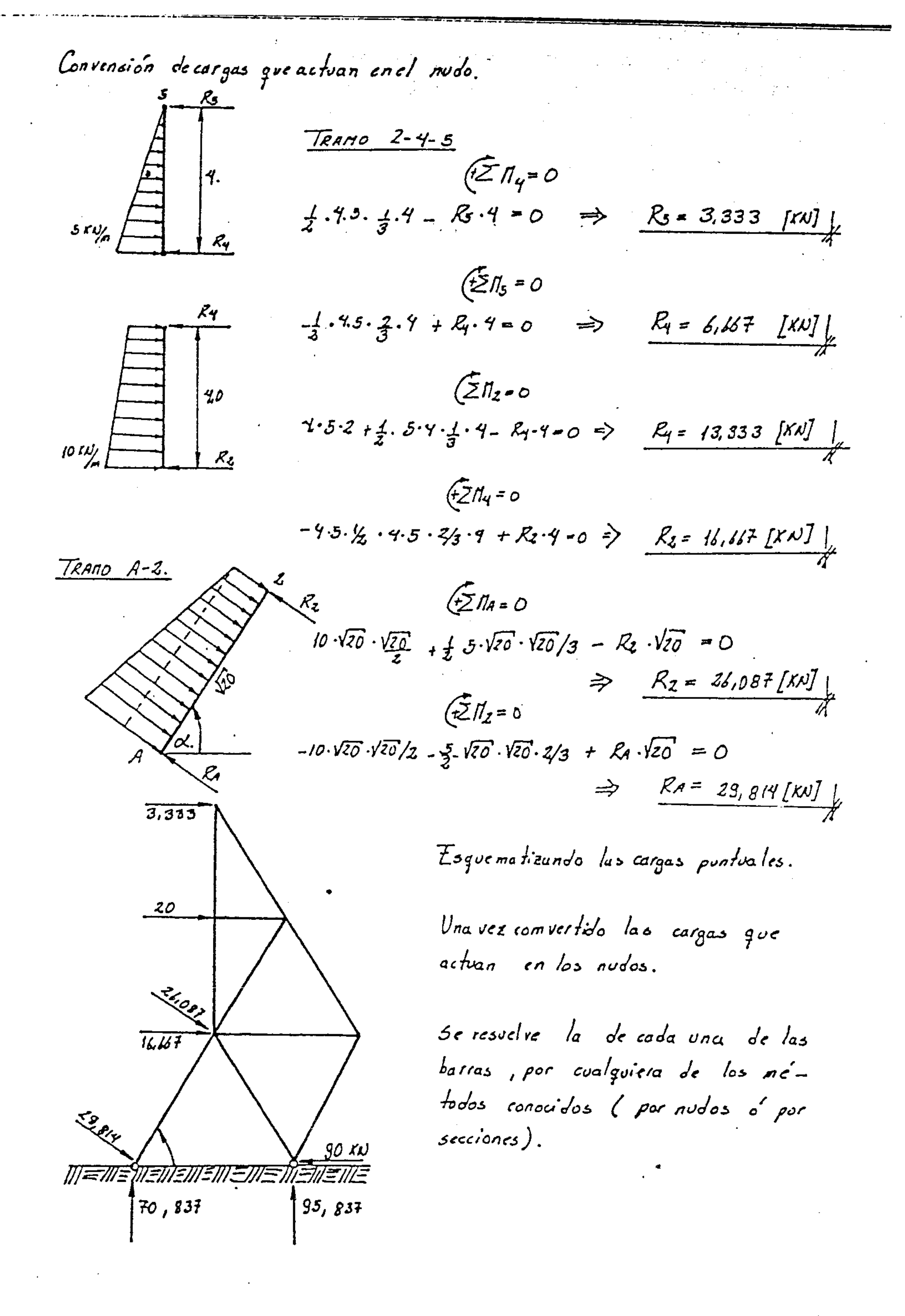
luego $\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$

$40 + 40 + 10 - 90 = 0$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$

$-20 \cdot 5 - \frac{1}{2}(2{,}7735) \times 51{,}081 + \frac{1}{2}(3{,}2265) \cdot 59{,}406 = 0$

$0 = 0 \qquad$ OK!!



Convención de cargas que actuan en el nudo.

TRAMO 2-4-5

$$\circlearrowleft + \sum M_4 = 0$$

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot \frac{1}{3}\cdot 4 - R_5\cdot 4 = 0 \Rightarrow R_5 = 3,333 \ [KN]$$

$$\circlearrowleft + \sum M_5 = 0$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot \frac{2}{3}\cdot 4 + R_4\cdot 4 = 0 \Rightarrow R_4 = 6,667 \ [KN]$$

$$\circlearrowleft \sum M_2 = 0$$

$$4\cdot 5\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot \frac{1}{3}\cdot 4 - R_4\cdot 4 = 0 \Rightarrow R_4 = 13,333 \ [KN]$$

$$\circlearrowleft + \sum M_4 = 0$$

$$-4\cdot 5\cdot 1/2\cdot 4\cdot 5\cdot 2/3\cdot 4 + R_2\cdot 4 = 0 \Rightarrow R_2 = 16,667 \ [KN]$$

TRAMO A-2.

$$\circlearrowleft + \sum M_A = 0$$

$$10\cdot\sqrt{20}\cdot\frac{\sqrt{20}}{2} + \frac{1}{2}\, 5\cdot\sqrt{20}\cdot\sqrt{20}/3 - R_2\cdot\sqrt{20} = 0$$

$$\Rightarrow R_2 = 26,087 \ [KN]$$

$$\circlearrowleft + \sum M_2 = 0$$

$$-10\cdot\sqrt{20}\cdot\sqrt{20}/2 - \frac{5}{2}\cdot\sqrt{20}\cdot\sqrt{20}\cdot 2/3 + R_A\cdot\sqrt{20} = 0$$

$$\Rightarrow R_A = 29,814 \ [KN]$$

Esquematizando las cargas puntuales.

Una vez comvertido las cargas que actuan en los nudos.

Se resuelve la de cada una de las barras, por cualquiera de los métodos conocidos (por nudos ó por secciones).

B- POR SECCIONES:-

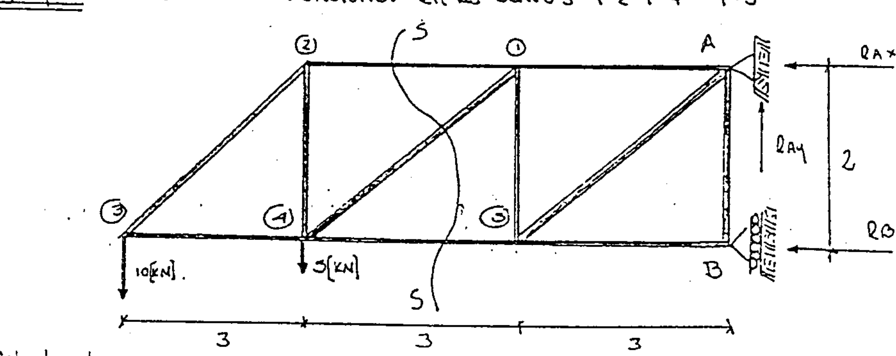
El "método de las secciones" se utiliza para determinar las tensiones q' actuan en cada barra de una estructura reticulada. Esta basada en el principio de q' si una estructura reticulada se encuentra en "Equilibrio" entonces cualquier parte de ella lo esta tambien en equilibrio.

El método consiste en cortar con una sección imaginaria (s-s) de la figura, de esta forma queda dividida en 2 partes, al cortar se reemplaza por las fuerzas desconocidas para q' la estructura permanesca en equilibrio estático.

Para cortar o aislar la estructura, se debe escoger una sección que pase a travez de no más de 3 miembros, cuyas fuerzas se desconocen, por lo tanto se pueda aplicar las tres ecuaciones fundamentales de la estática.

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0 \ ; \ \uparrow \Sigma F_y = 0 \ ; \ \curvearrowright^{+} \Sigma M_o = 0$$

Ejemplo:- Calcular las tensiones en las barras 1-2 1-4 4-5



Cálculo de reacciones:

$\curvearrowright^{+} \Sigma M_A = 0 \qquad -10\cdot 9 - 5\cdot 6 + R_B \cdot 2 = 0$

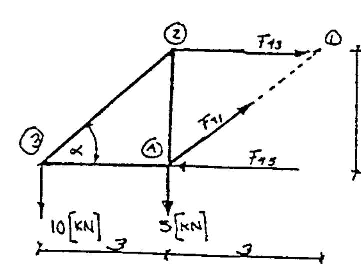
$\underline{R_B = 60\,[KN]}$

$\curvearrowright^{+} \Sigma M_B = 0 \qquad -10\cdot 9 - 5\cdot 6 - R_{Ax}\cdot 2 = 0$

$\underline{R_{Ax} = -60\,[KN]}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad R_{Ay} - 10 - 5 = 0 \qquad \underline{R_{Ay} = 15\,[KN]}$

Si cortamos en la sección (s-s) se tiene:



$\curvearrowright^{+} \Sigma M_1 = 0$

$F_{45}\cdot 2 - 10\cdot 6 - 5\cdot 3 = 0$

$F_{45} = \dfrac{60+15}{2} = 37{,}5\,[KN]$

$\Rightarrow \boxed{F_{45} = 37{,}5\ [KN]}$

$\operatorname{Sen}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$\Sigma M_A = 0$

$60 \cdot 2 - F_{54} \cdot 2 - F_{14} \cdot \operatorname{Sen}\alpha \cdot 3 = 0$

$120 - F_{54} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} F_{14} \cdot 3 = 0 \quad (1)$

$\Sigma M_B = 0$

$-F_{12} \cdot 2 - F_{14} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot 2 - F_{14} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 3 + 60 \cdot 2 = 0$

$-2 \cdot F_{12} - \left(\frac{6}{\sqrt{5}} + \frac{6}{\sqrt{5}}\right) F_{14} + 120 = 0 \quad (2)$

De (1) y (2)

$F_{14} = 16{,}771\,[KN]$

$F_{12} = 15{,}00\,[KN]$

2: Calcular las tensiones de las barras 6-5 y 2-6 del puente mostrado en la figura.

GE_E: $Ri - E = 0$

$3 - 3 = 0$

$0 = 0$ OK!!

GE_I: $b = 2n - 3$

$13 = 2 \cdot 8 - 3$

$13 = 13$ OK!!

Reacciones de apoyo:

$\Sigma M_A = 0 \quad 5 \cdot 10 + 3 \cdot 15 - R_B \cdot 20 = 0 \Rightarrow R_B = 4{,}75\,[KN]$

$\Sigma M_B = 0 \quad R_{Ay} \cdot 20 - 5 \cdot 10 - 3 \cdot 5 = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 3{,}25\,[KN]$

Si cortamos en la sección (A-A) se tiene.

$\operatorname{Sen}\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$; $\operatorname{Cos}\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$

$\frac{6}{10+x} = \frac{4}{5+x}$

$30 + 6 \cdot x = 40 + 4x$

$2x = 10 \quad x = 5$

Luego: $\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_o = 0 \Rightarrow 4{,}75 \cdot 5 - 3 \cdot 10 - F_{62} \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} \cdot 10 - F_{62} \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} \cdot 4 = 0$

$$23{,}75 - 30 - F_{62}\left(\frac{40}{\sqrt{41}} + \frac{20}{\sqrt{41}}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{F_{62} = -0{,}667\,[KN]}$$

F_{65}, β, 6, $F_{62} = 0{,}667$, α, 4m, F_{23}, 3, B, 3[KN], 5m., 4,75

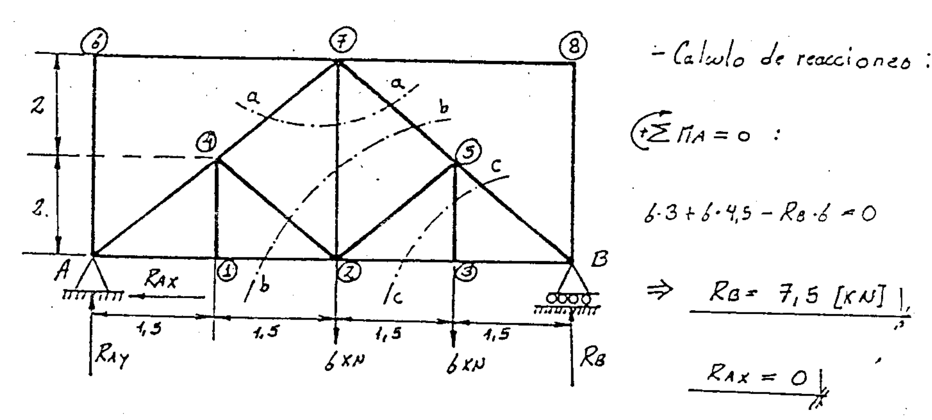
$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_B = 0$; $\quad Sen\,\beta = \frac{2}{\sqrt{29}}$; $\quad Cos\,\beta = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$$-3 \cdot 5 + 0{,}667 \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} \cdot 5 + 0{,}667 \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} \cdot 4 - F_{65} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot 4 + F_{65} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} \cdot 5 = 0$$

$$F_{65}\left(\frac{2 \cdot 5}{\sqrt{29}} - \frac{20}{\sqrt{29}}\right) = 10{,}819$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{65} = -5{,}853\,[KN]}$$

(3.-) Determinar las tensiones en las barras 4-7; 2-7 y de 5-B, 2-3 indicar si se encuentran en tracción o en compresión.



- Calculo de reacciones:

$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_A = 0$:

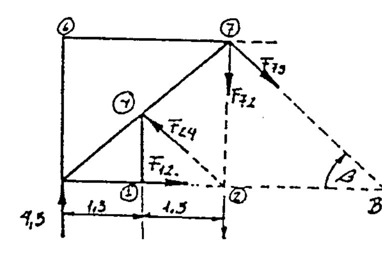
$$6 \cdot 3 + 6 \cdot 4{,}5 - R_B \cdot 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{R_B = 7{,}5\,[KN]}$$

$$\underline{R_{AX} = 0}$$

$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_B = 0$; $\quad R_{AY} \cdot 6 - 6 \cdot 3 - 6 \cdot 1{,}5 = 0 \quad \cdots\cdots \Rightarrow \quad \underline{R_{AY} = 4{,}5\,[KN]}$

1º Corte en b-b. nos da:

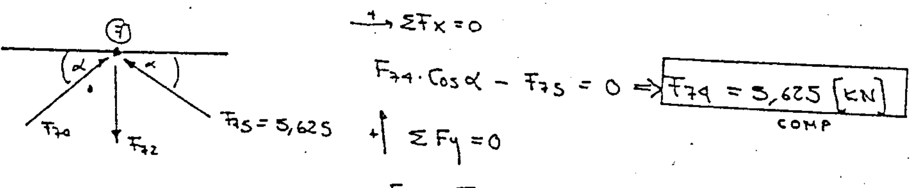


si: $Sen\,\beta = \frac{4}{5}$; $Cos\,\beta = \frac{3}{5}$

$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_2 = 0$; $\quad 4{,}5 \cdot 3 + F_{75} \cdot \frac{3}{5} \cdot 4 = 0$

$$\Rightarrow \quad \underline{F_{75} = -5{,}625\,[KN]}$$

Ahora considerando el equilibrio en la sección (a-a) tendremos:



$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$

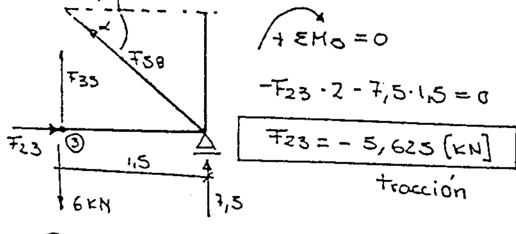
$F_{74} \cdot \cos\alpha - F_{75} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{F_{74} = 5,625\ [kN]}$ COMP

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$

$-F_{72} + F_{74} \cdot Sen\alpha + 5,625 \cdot Sen\alpha = 0$

$-F_{72} + 5,625 \cdot \frac{4}{5} + 5,625 \cdot \frac{4}{5} = 0$ $\boxed{F_{72} = 9\ [kN]}$ TRACCION

tomando la sección (3-3) o (c-c) de la figura anterior se tiene



$\curvearrowright + \Sigma M_o = 0$

$-F_{23} \cdot 2 - 7,5 \cdot 1,5 = 0$

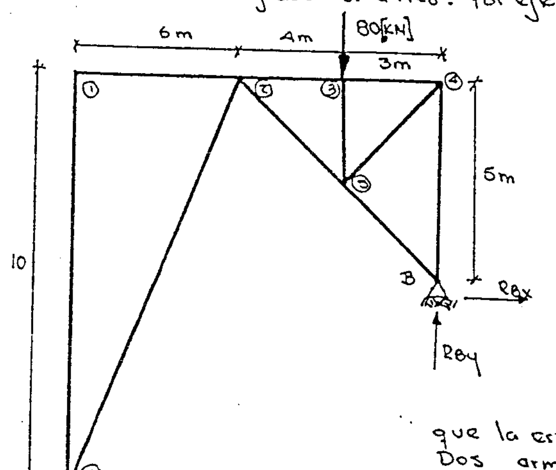
$\boxed{F_{23} = -5,625\ (kN)}$ tracción

$\curvearrowright \Sigma M_B = 0 \quad -7,5 \cdot 1,5 - F_{58} \cdot Sen\alpha \cdot 1,5 = 0 \Rightarrow$

$F_{58} = -\frac{7,5 \cdot 5}{4} = -9,375[kN]$

$\boxed{F_{58} = -9,375\ [kN]}$ COMPRESION

5 7: ARMADURAS CONECTADAS: En algunas configuraciones de alguna estructura articulada, en los apoyos de la estructura contiene más de 3 reacciones desconocidas aparentemente no cumple con las condiciones del grado estático. Por ejemplo.



Análisis del grado estático

Exterior: $GE = R_i - 3$

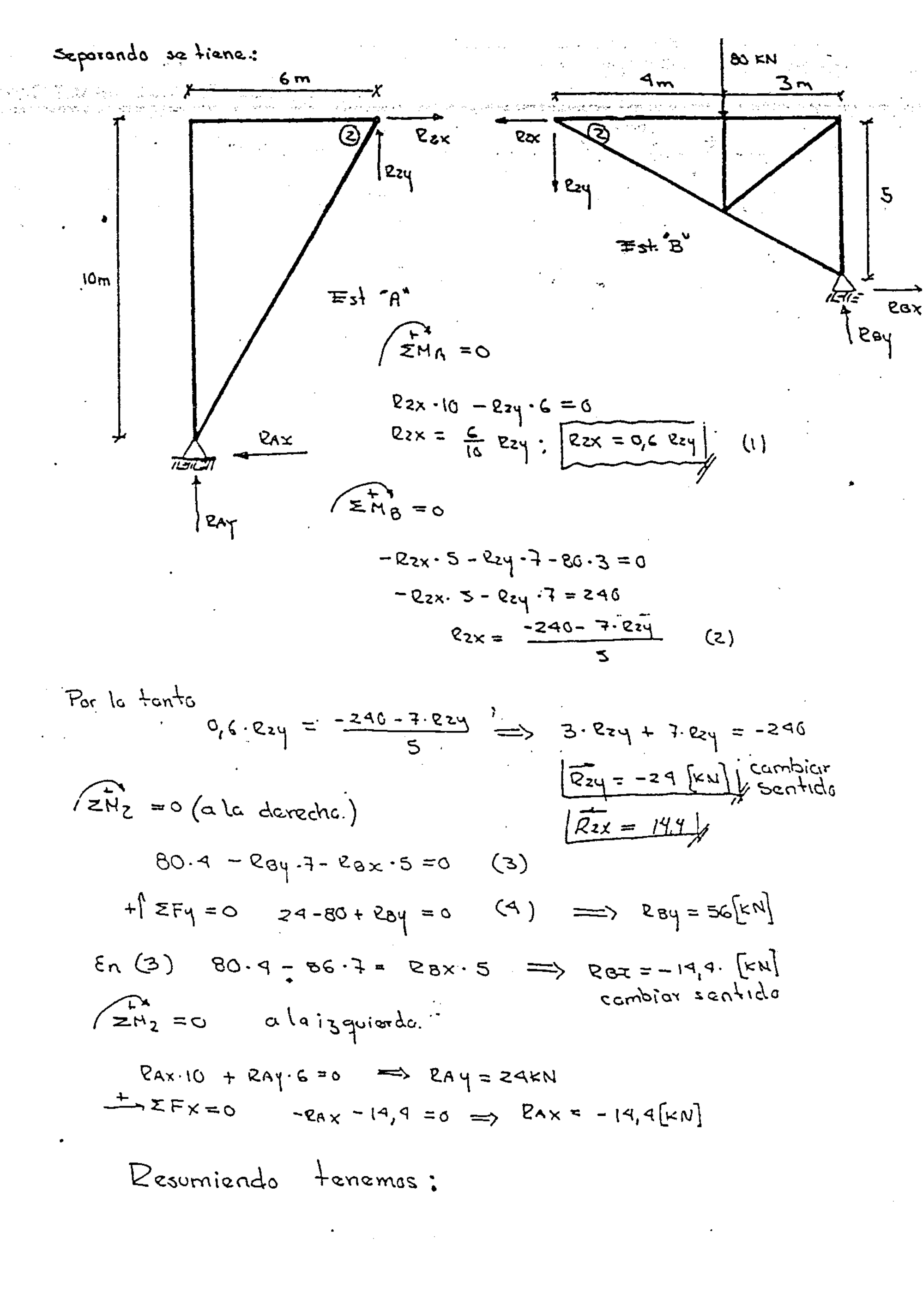
$GE = 4 - 3 = 1$? No cumple.

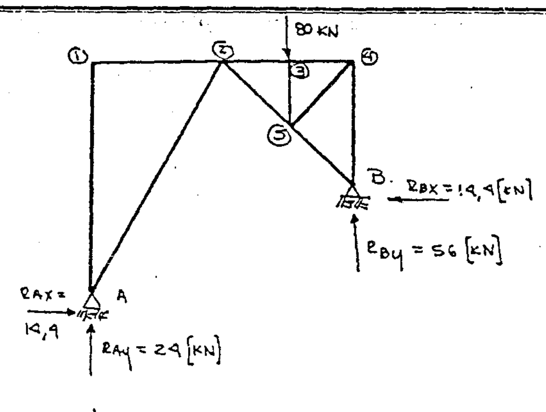
Interior: $b = 2n - 3 =$

$b = 2 \cdot 7 - 3 = 11$?

$10 \neq 11 \rightarrow$ No cumple.

En la estructura se tiene 10 Barras pero una inspección cuidadosa de la figura revela que la estructura consiste realmente de Dos armaduras separadas que comparten una junta nudo común en ② por lo tanto


Separando se tiene:
6 m
R2x
R2y
10m
Est "A"
RAx
RAy
80 KN
4m
3m
R2x
R2y
5
Est "B"
RBx
RBy
ΣMA = 0
R2x · 10 − R2y · 6 = 0
R2x = 6/10 R2y ; R2x = 0,6 R2y (1)
ΣMB = 0
−R2x · 5 − R2y · 7 − 80 · 3 = 0
−R2x · 5 − R2y · 7 = 240
R2x = (−240 − 7 · R2y) / 5 (2)
Por lo tanto
0,6 · R2y = (−240 − 7 · R2y) / 5 ⟹ 3 · R2y + 7 · R2y = −240
R2y = −24 [KN] cambiar sentido
R2x = 14,4
ΣM2 = 0 (a la derecha)
80 · 4 − RBy · 7 − RBx · 5 = 0 (3)
+↑ ΣFy = 0 24 − 80 + RBy = 0 (4) ⟹ RBy = 56 [KN]
En (3) 80 · 4 − 56 · 7 = RBx · 5 ⟹ RBx = −14,4 [KN]
cambiar sentido
ΣM2 = 0 a la izquierda
RAx · 10 + RAy · 6 = 0 ⟹ RAy = 24 KN
→+ ΣFx = 0 −RAx − 14,4 = 0 ⟹ RAx = −14,4 [KN]
Resumiendo tenemos:
ATRAS



Una vez encontrados las reacciones de apoyo, se pueden encontrar las tensiones en cada barra//

2.) Calcular las tensiones de cada una de las barras indicada en la fig.

280 [KN]
12m 15m 11m
RAX
360 [KN]
3m
7
RAy
4m
8

Si se analiza el grado estático no satisface ni exterior ni interior. Por lo tanto se separa la estructura en (2)

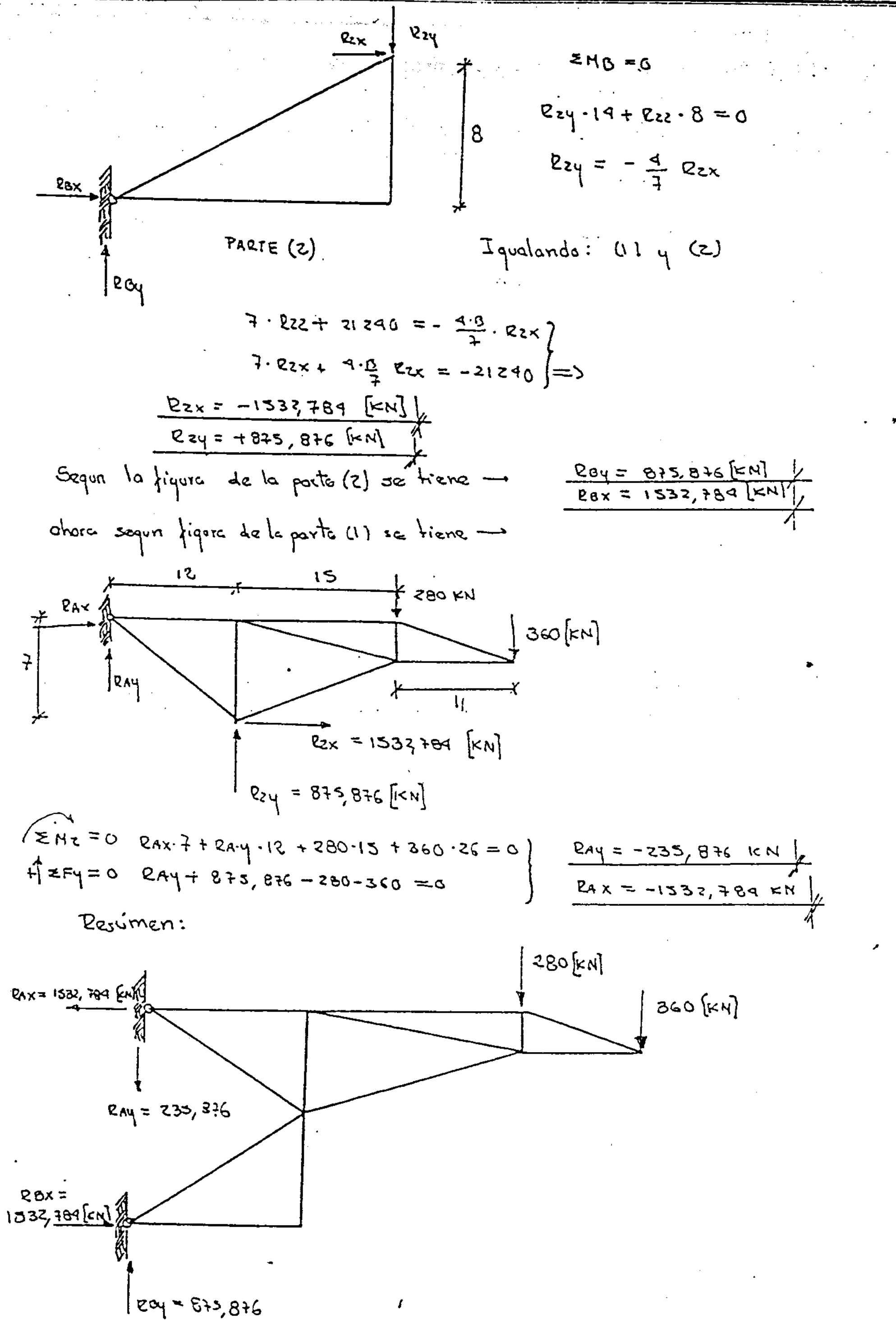
RBX
RBy

280 [KN]
RAX
360 [KN]
RAy
PARTE (1)
2
R2x
R2y

$$\sum \overset{+}{M}_A = 0$$

$$-R_{2y} \cdot 12 + R_{2x} \cdot 7 + 280 \cdot 27 + 360 \cdot 38 = 0$$

$$R_{2y} = \frac{7 \cdot R_{2x} + 21240}{12} \qquad (1)$$


Rzx
Rzy
8
RBx
RBy
PARTE (2)
ΣMB = 0
Rzy · 14 + Rzz · 8 = 0
Rzy = − 4/7 Rzx
Igualando: (1) y (2)
7 · Rzz + 21240 = − 4·8/7 · Rzx
7 · Rzx + 4·8/7 Rzx = −21240
Rzx = −1532,784 [KN]
Rzy = +875,876 [KN]
Segun la figura de la parte (2) se tiene →
RBy = 875,876 [KN]
RBx = 1532,784 [KN]
ahora segun figura de la parte (1) se tiene →
12
15
280 KN
RAx
360 [KN]
7
RAy
11
Rzx = 1532,784 [KN]
Rzy = 875,876 [KN]
ΣMz = 0 RAx · 7 + RAy · 12 + 280 · 15 + 360 · 26 = 0
ΣFy = 0 RAy + 875,876 − 280 − 360 = 0
RAy = −235,876 KN
RAx = −1532,784 KN
Resúmen:
280 [KN]
360 [KN]
RAx = 1532,784 [KN]
RAy = 235,876
RBx = 1532,784 [KN]
RBy = 875,876

③ Hallar los tensiones en los barras

En el nudo ③ se produce reacción debido a la carga de 800 [N] y la tension del cable T.

$tg\alpha = \frac{0,6}{5} = \alpha = 6,8428°$

$Sen\,\alpha = 0,119145$

$Cos\,\alpha = 0,992877$

$T_x = 800 \cdot Cos\,\alpha = 794,302\ [N]$

$T_y = 800 \cdot Sen\,\alpha = 95,316\ [N]$

$\bar{x} = 0,6 \cdot Sen\,\alpha$

$\bar{x} = 0,071487$

$\bar{y} = 0,6 \cdot Cos\,\alpha$

$\bar{y} = 0,595726$

Luego

$\Sigma M_M = 0$

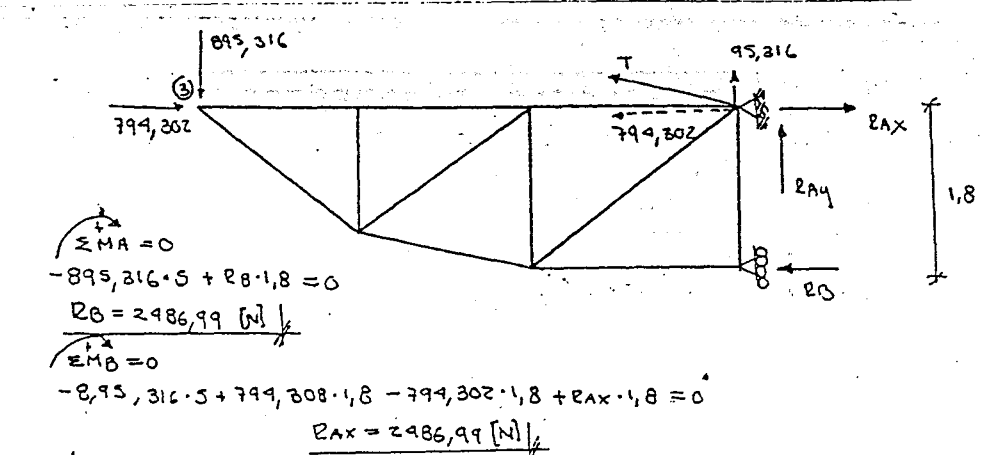
$-R_{3y} \cdot 0,6 + 95,316 \cdot 0,671487 + 794,302 \cdot 0,595726 = 0$

$R_{3y} = 895,316\ [N]$

$\Sigma F_x = 0$

$794,302 - R_{3x} = 0 \Rightarrow R_{3x} = 794,302\ [N]$

Estas fuerzas actuan en el punto 3 que es vértice de la estructura reticulada.



$\curvearrowright^{+} \Sigma M_A = 0$

$-895{,}316 \cdot 5 + R_B \cdot 1{,}8 = 0$

$R_B = 2486{,}99\ [N]$

$\curvearrowright^{+} \Sigma M_B = 0$

$-8{,}95{,}316 \cdot 5 + 794{,}308 \cdot 1{,}8 - 794{,}302 \cdot 1{,}8 + R_{Ax} \cdot 1{,}8 = 0$

$R_{Ax} = 2486{,}99\ [N]$

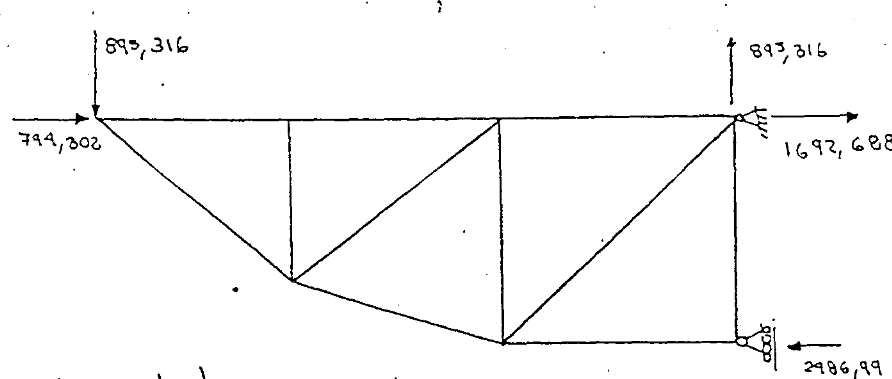
$+\uparrow \Sigma F_y = 0$

$R_{Ay} + 95{,}316 - 895{,}316 = 0 \qquad R_{Ay} = 800\ [N]$

Control: $\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \quad 794{,}30 + R_{Ax} - 794{,}302 - R_B = 0 \Rightarrow \boxed{0=0}$ OK!!

$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad R_{Ay} - 895{,}316 + 95{,}316 = 0 \Longrightarrow \boxed{0=0}$ OK!!

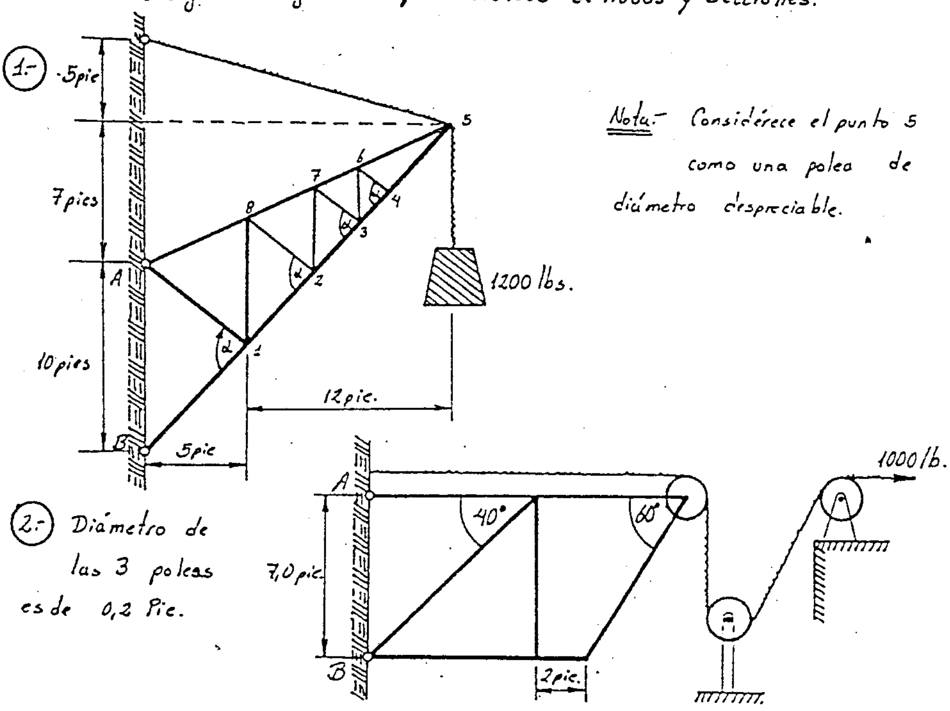
Resumen:



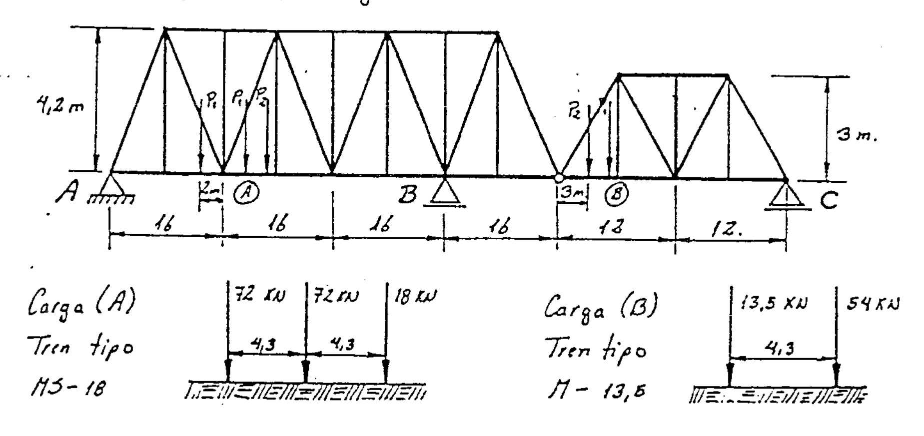
A partir de los reacciones de apoyo y cargas en los nudos se puede aplicar cualquiera de los métodos para calcular la tensión en las barras.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Resolver los siguientes ejercicios por el método de nudos y secciones.



3.- Calcular las tensiones de las barras 2-11 y 8-18 cuando 2 camiones estan estacionados según muestra la fig.



BASTIDORES Y MARCOS PLANOS

6

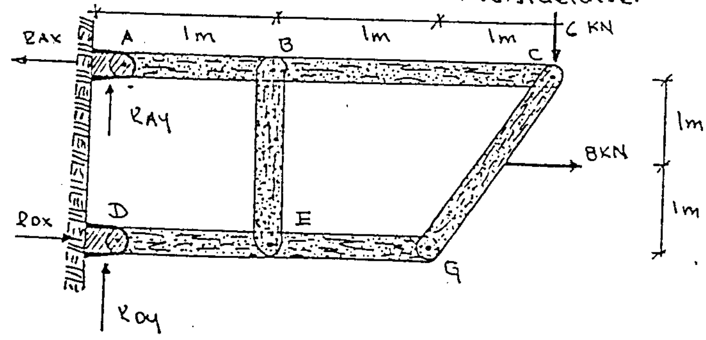
6,1: DEFINICION.- En esta sección se considerará estructuras de miembros interconectados q' no satisfacen la definición de una armadura, o sea q' no cumplen con las condiciones básicas de cerchas o armaduras trianguladas.

A estas estructuras se denominan "Bastidores" si estan diseñados para permanecer en reposo al soportar cargas, y máquinas si estan diseñadas para moverse y aplicar cargas.

En este capítulo, se presenta el análisis de fuerzas de estructuras más complejas llamadas "marcos planos", las características básicas de un marco plano, ó simplemente "marco" son:

a) todos los miembros se localizan en un solo plano
b) todas las fuerzas q' actuan sobre esta estructura quedan en el plano del mismo
c) No hay restricción en la forma en q' se aplica las cargas sobre los miembros del marco (estas pueden estar en las conecciones, en el tramo, e inclusive pueden ser cargas de cualquier tipo.
d) A veces la estructura completa es estáticamente indeterminada, pero se debe determinar tantas reacciones sean posibles, Luego se analizan diagramas de elementos individuales.

6.2: ANALISIS DE LA ESTRUCTURA COMPLETA.- Sea por ejemplo la estructura a considerarse.



1:) En la estructura se presenta 4 reacciones de apoyo RAY, RAX, RDY, RDX por lo tanto es estáticamente indeterminado
2:) las cargas no actuan en los nudos, por lo tanto no pertenece al campo de las estructuras reticuladas.

3:) los miembros no forman triángulos por lo q' no es estructura triangulada

Haciendo uso de las tres ecuaciones fundamentales de la estática vale decir.

$$\xrightarrow{+}\Sigma Fx=0 \quad ; \quad \uparrow \Sigma Fy=0 \quad ; \quad \curvearrowright^{+} \Sigma M=0$$

Se tiene: pero sin embargo, si observamos que las rectas de acción de tres ecuaciones se cortan en el punto A, por lo tanto

$$\curvearrowright^{+} \Sigma M_A=0$$

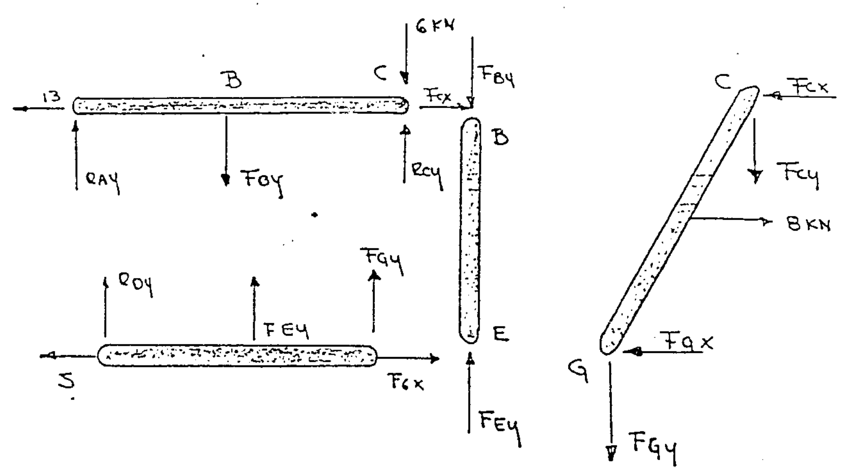
$$-R_{Dx}\cdot 2 - 8\cdot 1 + 6\cdot 3 = 0 \implies R_{Dx} = \frac{10}{2} = 5\,[KN]$$

Si aplicamos $\xrightarrow{+}\Sigma F_x=0$

$$-R_{Ax} + 5 + 8 = 0 \implies R_{Ax} = 13\ KN$$

Aunque no se puede determinar R_{Ay} y R_{Dy}, estas se determinan analizando elementos individuales.

6.3.- ANALISIS DE LOS ELEMENTOS: El siguiente paso es dibujar los diagramas de cuerpo libre de los elementos q' constituyen la estructura completa.



En estas condiciones cada uno de sus elementos deben estar en equilibrio estático.

Vale decir

$$\Sigma Fx=0 \quad ; \quad \Sigma Fy=0 \quad ; \quad \curvearrowleft \Sigma M=0$$

6,4 MIEMBROS DE DOS FUERZAS:- En la figura anterior se puede notar que el miembro BE es un miembro de DOS FUERZAS por lo q' este esta sometida a dos fuerzas axiales F_{By} y F_{Ey} en las conexiones B y E respectivamente (iguales en magnitud y de sentido opuesto.

Detectar los miembros de DOS FUERZAS en este tipo de estructuras y dibujar sus diagramas de cuerpo libre, reduce el Número de incógnitas por determinar y simplificar el análisis.

6,5 CARGAS APLICADAS EN LOS NUDOS:- Cuando una carga se aplica en un nudo (Junta) surge una pregunta.

¿Donde se coloca la carga cuando se dibujan los diagramas de cuerpo libre? la respuesta es Sobre cualquiera o sea puede actuar sobre el elemento ABC ó sobre el elemento CG.

Para detectar errores en los diagramas de cuerpo libre, estas deben anularse con las fuerzas del otro extremo del elemento, para reproducir la estructura original.

Por lo tanto en la Barra ABC, se tiene:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \; ; \; -13 + F_{cx} = 0$

$F_{cx} = 13 \text{ KN}$

además en la barra DEG

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \; ; \; 5 + F_{Gx} = 0 \quad F_{Gx} = -5 \text{KN} \Rightarrow F_{Gx} = -5 \text{KN}$

en la barra GC se tiene:

C, 13, Fcy, 8, 1m, 1m, G, FGx, FGy

$\Sigma M_E = 0$

$-13 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + F_{cy} \cdot 1 = 0$

$F_{cy} = 18 [KN]$

además: $+\uparrow \Sigma F_y = 0 \; ; \; -F_{Gy} - 18 = 0$

$F_{Gy} = -18 \text{KN}$

además en la barra ABC:

$\Sigma M_B = \quad R_{Ay} \cdot 1 + 6 \cdot 2 - F_{cy} \cdot 2 = 0$

$R_{Ay} - 2F_{cy} + 12 = 0$

$R_{Ay} = 24$

$\Sigma M_E = 0;$

$R_{Dy} \cdot 1 - F_{Gy} \cdot 2 = 0 \qquad R_{Dy} = -18$

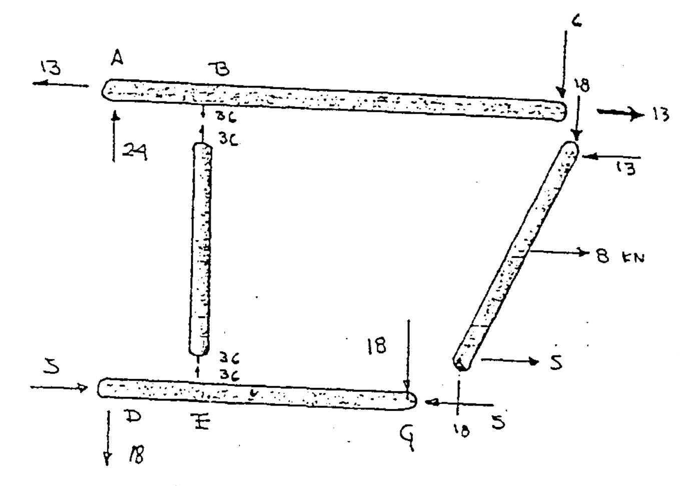
$R_{Dy} = -18 [KN]$

Finalmente:

$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad -18 + F_{Ey} - 18 = 0$

$F_{Ey} = 36$

Es nesesario hacer un resumen de la fuerzas en cada nudo ó juntas



los reacciones de apoyo Son:

$R_{Ax} = 13 \leftarrow$	; $R_{Ay} = 24 \uparrow$
$R_{Dx} = 5 \rightarrow$	; $R_{Dy} = 18 \downarrow$

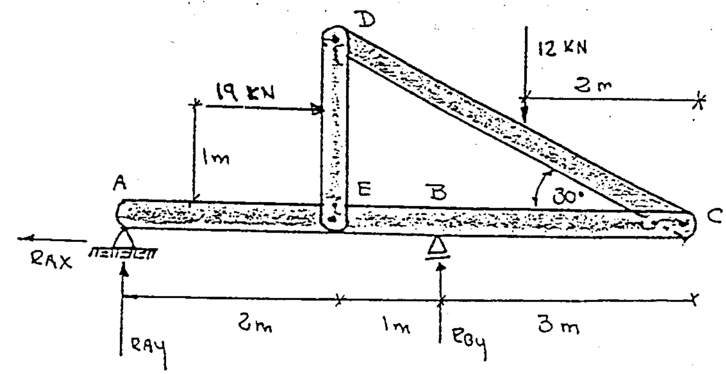
Existiendo equilibrio en los nudos.

Comprobación:-

$$\left.\begin{array}{ll} \Sigma F_x = 0 ; & -13 + 5 + 8 = 0 \\ \Sigma F_y = 0 ; & 24 - 18 - 6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 0 \quad ok!$$

Por otra parte los fuerzas en los nudos o juntas sirven para diseñar el pasador del nudo.

1: Hallar las fuerzas en todas las juntas. del marco indicado.



1°) Reacciones de apoyo

$\sum M_A = 0 \qquad 19 \cdot 1 + 12 \cdot 4 - R_{By} \cdot 3 = 0 \qquad \underline{R_{By} = 22{,}333}$

$\sum M_B = 0 \qquad R_{Ay} \cdot 3 + 19 \cdot 1 + 12 \cdot 1 = 0 \qquad \underline{R_{Ay} = -10{,}333}$

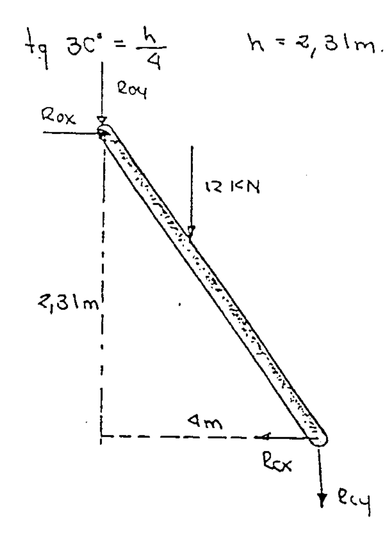
$\sum F_x = 0 \qquad -R_{Ax} + 19 = 0 \qquad \underline{R_{Ax} = 19}$

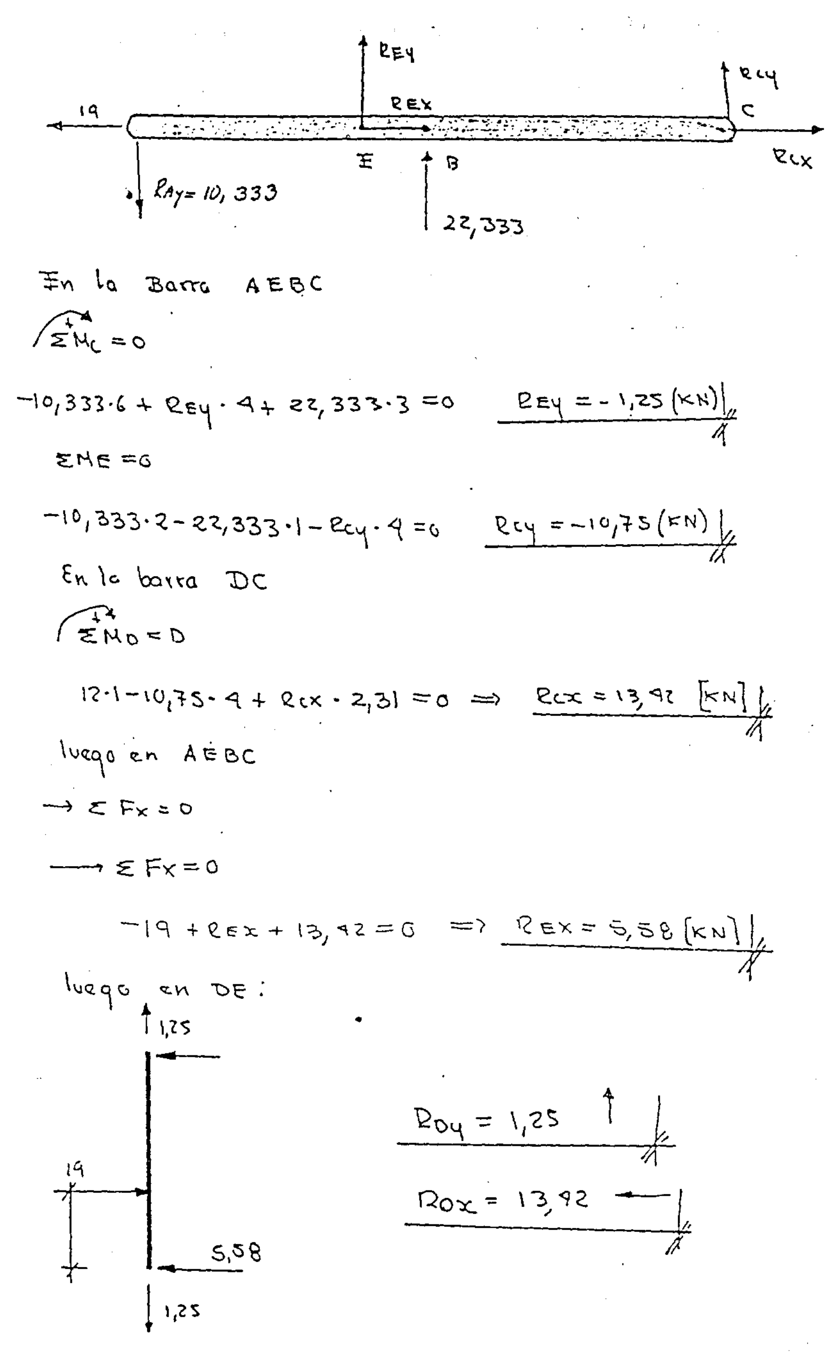
Separando por barras.

RDy
D
RDx
19 KN
h
1m
E
REx
REy

Barra DE :

$\operatorname{tg} 30° = \frac{h}{4} \qquad h = 2{,}31 m.$





En la Barra AEBC

$\curvearrowright^{+} \sum M_C = 0$

$-10{,}333 \cdot 6 + R_{Ey} \cdot 4 + 22{,}333 \cdot 3 = 0$ $\qquad \underline{R_{Ey} = -1{,}25\ (KN)}$

$\sum M_E = 0$

$-10{,}333 \cdot 2 - 22{,}333 \cdot 1 - R_{cy} \cdot 4 = 0$ $\qquad \underline{R_{cy} = -10{,}75\ (KN)}$

En la barra DC

$\curvearrowright^{+} \sum M_D = 0$

$12 \cdot 1 - 10{,}75 \cdot 4 + R_{cx} \cdot 2{,}31 = 0 \Rightarrow$ $\qquad \underline{R_{cx} = 13{,}42\ [KN]}$

luego en AEBC

$\rightarrow \sum F_x = 0$

$\longrightarrow \sum F_x = 0$

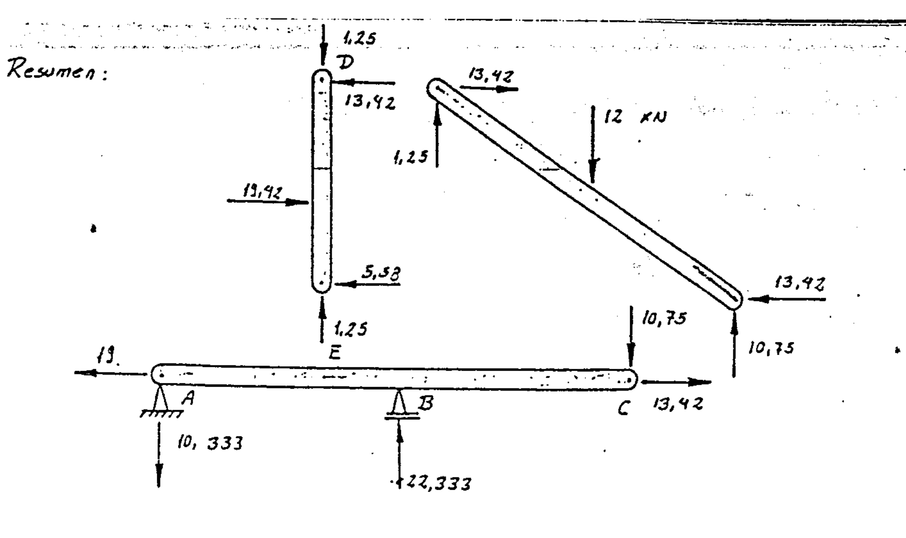
$-19 + R_{Ex} + 13{,}42 = 0 \Rightarrow$ $\qquad \underline{R_{Ex} = 5{,}58\ [KN]}$

luego en DE:

$\underline{R_{Dy} = 1{,}25 \uparrow}$

$\underline{R_{Dx} = 13{,}42 \leftarrow}$

Resumen:



(3.-) Hallar las componentes de las fuerzas que actuan sobre los pasadores del marco indicado. ¿ Que pasador tiene la maxima fuerza ?

E

3,0 m.

C

D

5 KN

18°

1,8 m.

A

B

R_{AX}

R_{AY}

1,0 m

2,0 m

1,5 m

0,8 m.

R_B

Cálculo de reacción de apoyo.

$\circlearrowleft + \sum M_A = 0$:

$5 \cdot \cos 18° * 3 + 5 \operatorname{sen} 18° * 1,8 - R_B \cdot 5,3 = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{R_B = 2,167 \, (KN)}$

$\circlearrowleft + \sum M_B = 0$:

$R_{AY} \cdot 5,3 - 5 \cos 18° * 2,3 - 5 \operatorname{sen} 18° * 1,8 = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{R_{AY} = 2,588 \ KN.}$

Además haciendo :

$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum Fx = R_{AX} - 5 \cdot \operatorname{Sen} 18° = 0 \Rightarrow \boxed{R_{AX} = 1,545 \ KN.}$

R: Descomponiendo en barras.

BARRA C-D

R_{CY} R_{DY} 1,545 R_{CX} R_{DX} 2,0 m 1,5 m. 4,755

$\circlearrowleft + \sum M_C = 0:$

$$4{,}755 \cdot 2 - R_{DY} * 3{,}5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_{DY} = 2{,}717 \ [KN]$$

$\circlearrowleft + \sum M_D = 0:$

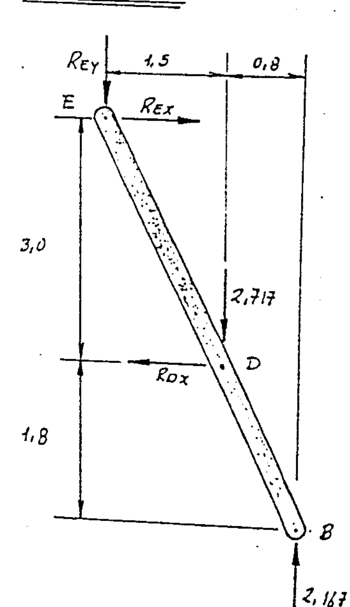
$$-4755 * 1{,}5 + R_{CY} * 3{,}5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R_{CY} = 2{,}038 \ [KN]}$$

Además: $\rightarrow \sum F_x = R_{DX} - R_{CX} - 1{,}545 = 0$

$$\Rightarrow \quad R_{DX} - R_{CX} = 1{,}545 \quad \ldots\ldots (1)$$

BARRA: EDB



Haciendo:

$\circlearrowleft + \sum M_E = 0$

$$2{,}717 \cdot 1{,}5 + R_{DX} * 3 - 2{,}167 * 2{,}3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R_{DX} = 0{,}303 \ (KN)}$$

Reem. R_{DX} en (1).

$$\boxed{R_{CX} = -1{,}242 \ (KN)}$$

$+\uparrow \sum F_Y = 0:$

$$-R_{EY} - 2{,}717 + 2{,}167 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R_{EY} = -0{,}550 \ (KN)}$$

En la barra EDB : $\circlearrowleft \Sigma M_B = 0$; $R_{EX} \cdot 4,8 - (-0,55) \times 2,3 - 2,717 \cdot 0,8 - 0,303 \times 1,8 = 0$

$\Rightarrow \quad R_{EX} = 0,303 \ (KN)$

BARRA: AC-E:

En esta barra ya se puede verificar haciendo ΣF_X además: ΣF_Y de tal forma que se cumple.

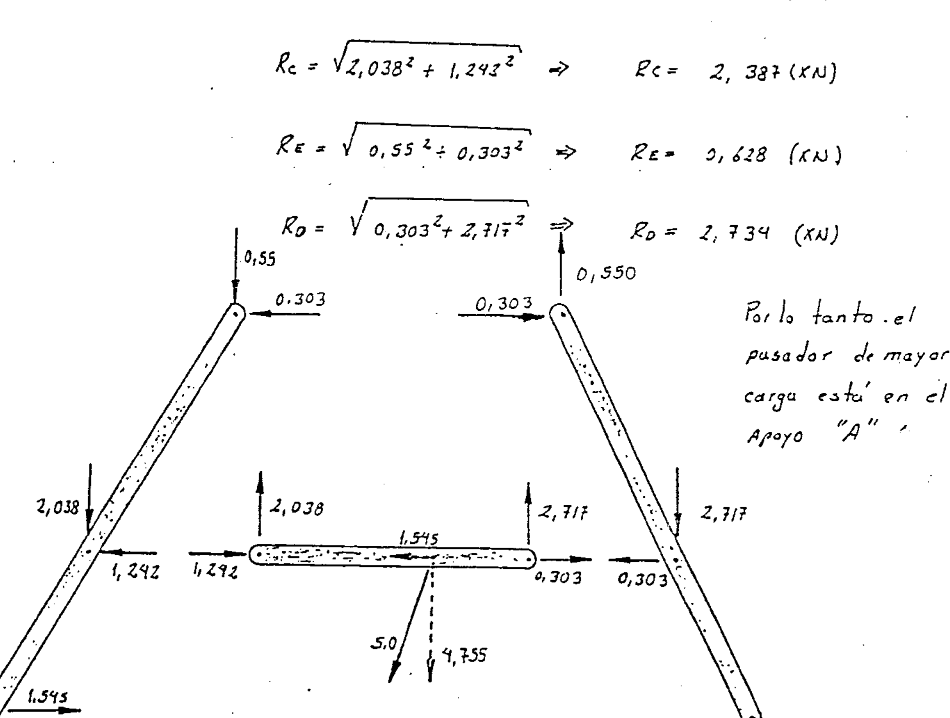
Las cargas en los pasadores se encuentran por:

$R_A = \sqrt{2,588^2 + 1,595^2} \Rightarrow R_A = 3,014 \ (KN)$

$R_C = \sqrt{2,038^2 + 1,243^2} \Rightarrow R_C = 2,387 \ (KN)$

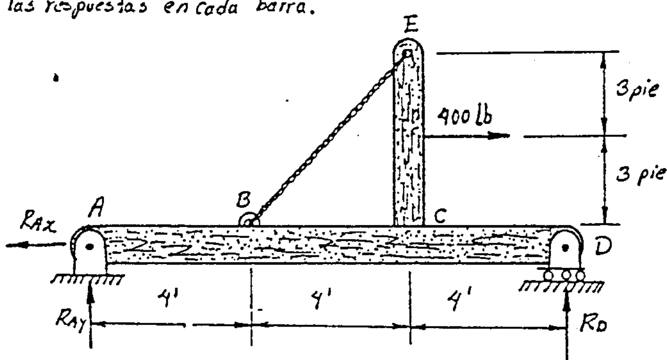
$R_E = \sqrt{0,55^2 + 0,303^2} \Rightarrow R_E = 0,628 \ (KN)$

$R_D = \sqrt{0,303^2 + 2,717^2} \Rightarrow R_D = 2,734 \ (KN)$



Por lo tanto el pasador de mayor carga está en el Apoyo "A".

4. Determinar las fuerzas sobre el elemento ABCD mostrado, prescribiendo las respuestas en cada barra.



Calculo de Reacciones de apoyo:

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \Rightarrow -R_{Ax} + 400 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{R_{Ax} = 400 [lb]}$

$\circlearrowleft + \sum M_A = 0 \; ; \; 400 * 3 - R_D * 12 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{R_D = 100 [lb]}$

$\circlearrowleft + \sum M_D = 0 \; ; \; R_{Ay} * 12 + 400 * 3 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\downarrow R_{Ay} = -100 [lb]}$

Tomando como elemento cada una de las barras por separado.

BARRA E-C

$\circlearrowleft + \sum M_E = R_{Cx} \cdot 6 - 400 * 3 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{R_{Cx} = 200 [lb]}$

$\circlearrowleft + \sum M_C = -R_{Ex} \cdot 6 + 400 \cdot 3 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{R_{Ex} = 200 [lb]}$

BARRA (ABCD)

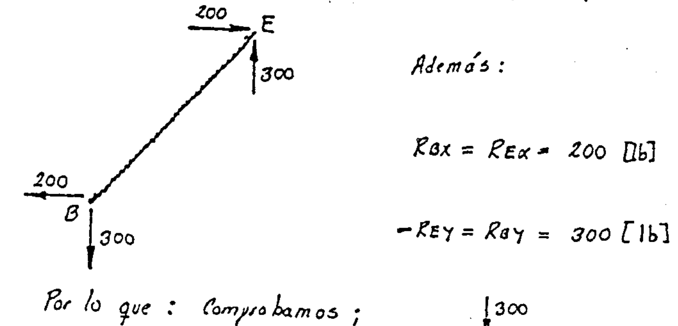
$\circlearrowleft + \sum M_B = -100 * 4 + R_{Cy} * 4 - 100 * 8 = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\downarrow R_{Cy} = 300 [lb]}$

De la misma forma si hacemos :

$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0 ; \quad -100 * 8 + R_{BX} \cdot 4 - 100 * 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\uparrow R_{By} = 300 \,[lb]}$

Fuerza en la cuerda será: si $R_{Cy} = R_{Ey} = 300$ [lb]

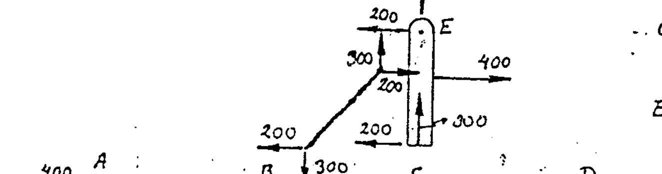


Además :

$R_{BX} = R_{EX} = 200$ [lb]

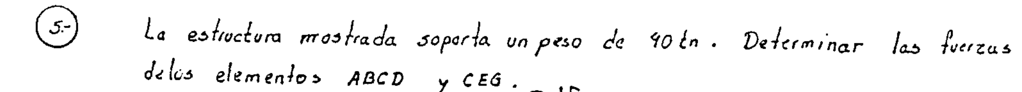
$-R_{EY} = R_{BY} = 300$ [lb]

Por lo que : Comprobamos ;



.. O sea :

Existe estabilidad !!



OK!!

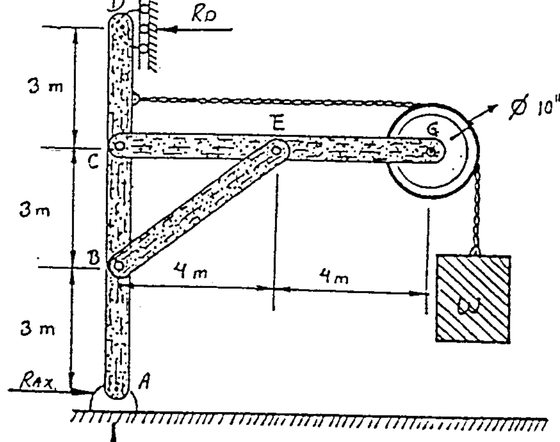
(5.-) La estructura mostrada soporta un peso de 40 tn . Determinar las fuerzas de los elementos ABCD y CEG .

1° Se determina las reacciones de apoyo

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0$

$-R_D * 9 + 40 * 8,127 = 0$

$\Rightarrow \quad \boxed{R_D = 36,12 \,[tn]}$

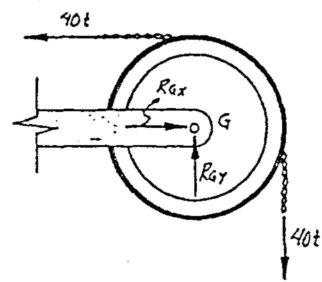


De la misma forma :

$\circlearrowleft + \sum M_D = 0 \; ; \quad -R_{Ax} \cdot 9 + 40 \cdot 8{,}127 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{Ax} = 36{,}12 \text{ t.}$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \; ; \quad R_{Ay} - 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{Ay} = 40 \text{ t.}$

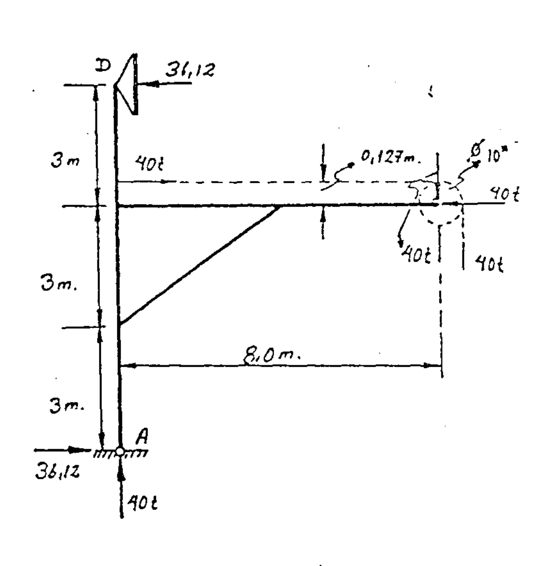
Calculo de reacciones en el punto G.



$\sum F_y = R_{Gy} - 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{Gy} = 40 t$

$\sum F_x = R_{Gx} - 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{Gx} = 40 t.$

2° Diagrama de cuerpo libre :



Comprobación de las reacciones.

$\circlearrowleft + \sum M_A = -R_D \cdot 9 + 40 \cdot 6{,}127 - 40 \cdot 6 + 40 \cdot 8 = 0$

$\Rightarrow \quad \boxed{R_D = 36{,}12 \text{ t}}$

$\circlearrowleft + \sum M_D = -R_{Ax} \cdot 9 + 40 \cdot 8 - 40 \cdot 2{,}873 + 40 \cdot 3 = 0$

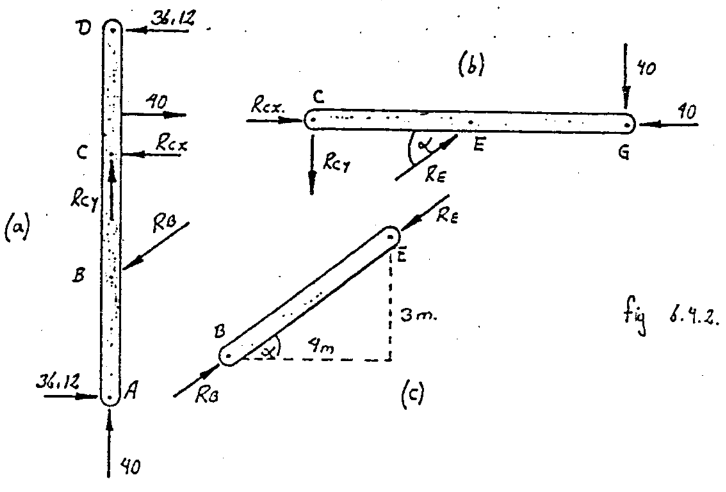
$\Rightarrow \quad \boxed{R_{Ax} = 36{,}12 t.}$

$+\uparrow \sum F_y = -40 + R_{Ay} = 0$

$\Rightarrow \quad \boxed{R_{Ay} = 40 t.}$

Como se puede ver se verifica. las reacciones de apoyo esto significa que la estructura está en equilibrio.

Diagramas de cuerpo libre en cada una de las barras.



De la barra C-E-G se tiene:

$\circlearrowleft + \sum M_E = 40 \cdot 4 - R_{cy} \cdot 4 = 0 \Rightarrow$ $R_{cy} = 40\ t.$

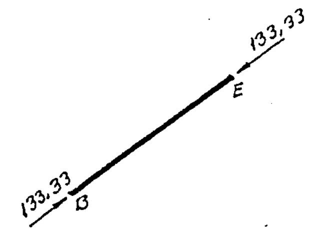
$\circlearrowleft + \sum M_c = -4 \cdot R_E \operatorname{Sen} \alpha + 40 \cdot 8 = 0 \Rightarrow$ $R_E = 133,33\ t$ donde: $\operatorname{Sen} \alpha = \frac{3}{5}$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = R_{cx} + R_E \cos\alpha - 40 = 0 \Rightarrow$ $\leftarrow R_{cx} = 66,67\ t$ con $\cos \alpha = \frac{4}{5}$

Por lo tanto : $R_{Ex} = 106,67$ además $R_{Ey} = 80,0\ t.$

Ahora analicemos para la barra E-B y A-B-C-D.

Por la tercera ley de Newton en la barra B-E se tiene:



Por lo tanto :

$R_B = 133,33\ t.$

En la barra. ABCD. tenemos:

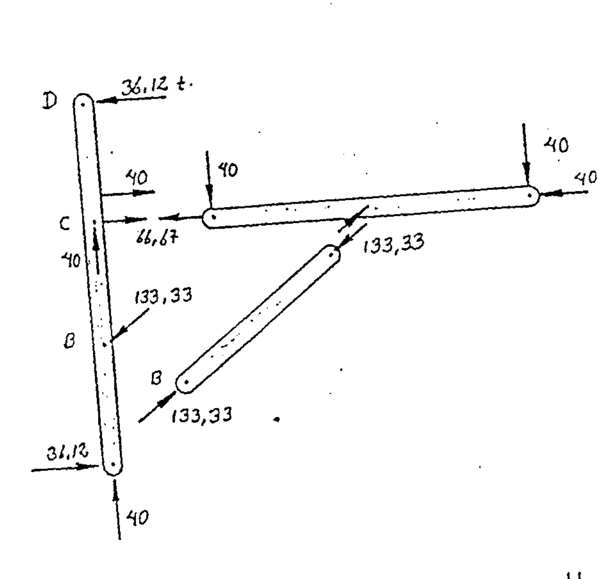
$$+\Sigma F_x = -36,12 + 40 + R_{cx} - 106,67 + 36,12 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad R_{cx} = 66,67\ t.$$

$$+\Sigma F_y = R_{cy} - 80 + 40 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad R_{cy} = 40\ t.$$

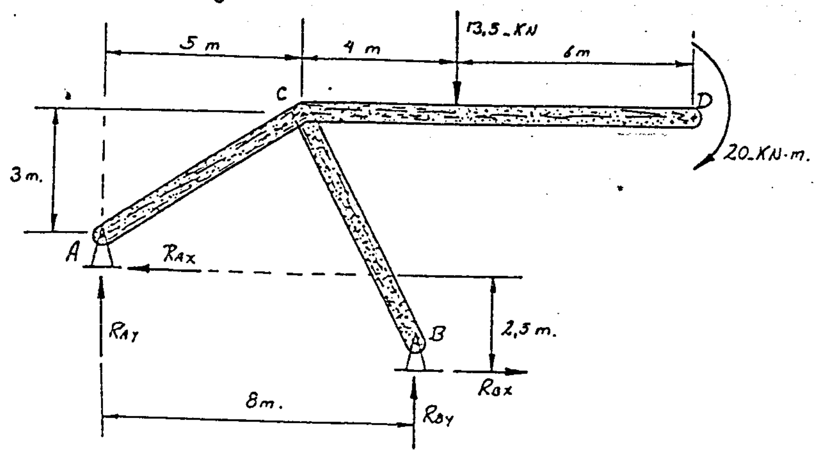
Ahora diagramando nuevamente la estructura tenemos:



En la figura anterior se puede observar que existe equilibrio estático.

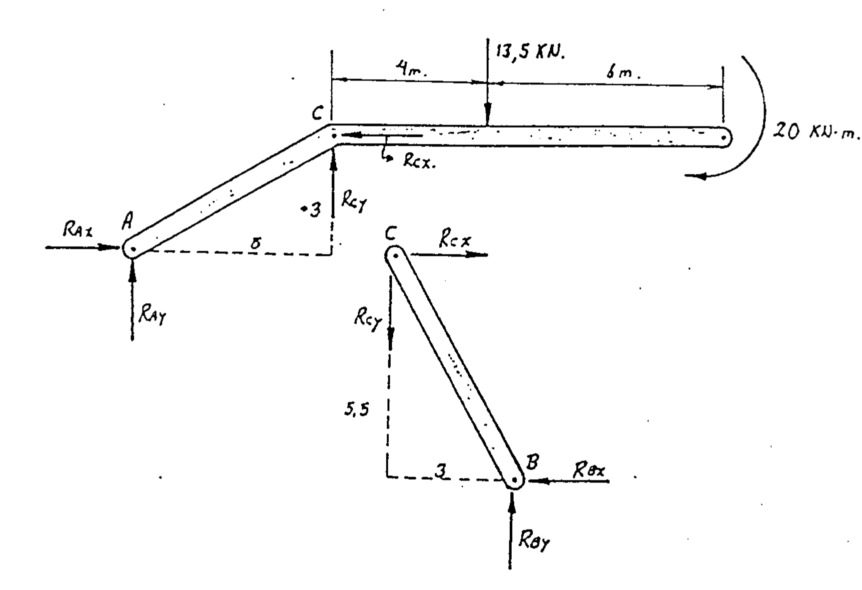
La tension máxima esta en la barra BE, osea en los nudos B y E.

6. Hallar las fuerzas del pasador, y las reacciones de apoyo; en el diagrama indicado en la figura.



Existen dos reacciones en A (R_{Ax}; R_{AY}), y dos reacciones en B (R_{Bx}; R_{BY}) por lo tanto la estructura es indeterminado, por lo que solamente se cuenta con tres ecuaciones.

Por lo tanto separando la estructura en miembros de cuerpo libre, se tiene:



En la fig anterior considerando la barra C-B se tiene.

$\circlearrowleft + \sum M_C = 0$; $5{,}5 \cdot R_{Bx} - 3 \cdot R_{By} = 0$ .... (1)

Además : $R_{Bx} = R_{Cx}$; $R_{BY} = R_{CY}$ .....(**)

Porno existir más cargas enel tramo.

Enla barra A-C-D, se tiene.

$\circlearrowleft + \sum M_A = 0$; $-R_{CY} \cdot 5 - R_{Cx} \cdot 3 + 13{,}5 \cdot 9 + 20 = 0$

Reemplazando (**) se tiene:

$$-5 R_{BY} - 3 R_{Bx} + 141{,}5 = 0$$

o sea: $5 R_{BY} + 3 R_{Bx} = 141{,}5$ ......(2)

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) obtenemos:

$R_{Bx} = 11{,}630$ (KN)

$R_{By} = 21{,}322$ (KN)

Entonces: $R_{Cx} = 11{,}630$ [KN]

$R_{Cy} = 1{,}322$ [KN]

Haciendo:

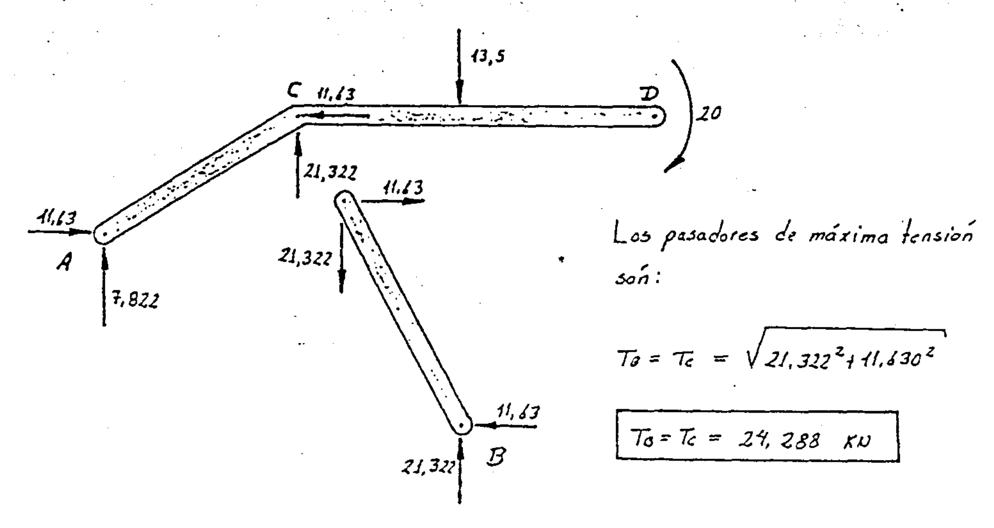
$\circlearrowleft \sum M_C = 0$; $R_{AY} \cdot 5 - R_{AX} \cdot 3 + 13{,}5 \cdot 4 + 20 = 0$ .... (3)

Ademas: $\rightarrow + \sum F_X = 0$; $R_{AX} = R_{Cx}$, pero $R_{Cx} = 11{,}630$ KN

Entonces: $R_{AX} = 11{,}630$ KN

Sust. R_{AX} en (3) $\Rightarrow$ $R_{AY} = 7{,}823$. KN.

Comprobación :

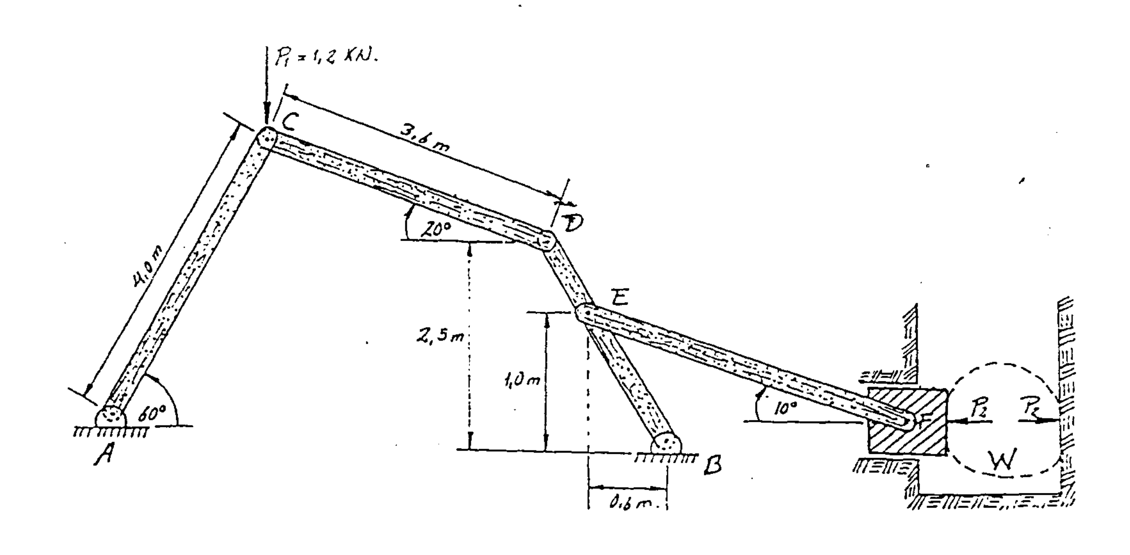


Los pasadores de máxima tensión són:

$$T_B = T_C = \sqrt{21,322^2 + 11,630^2}$$

$$\boxed{T_B = T_C = 24,288 \ KN}$$

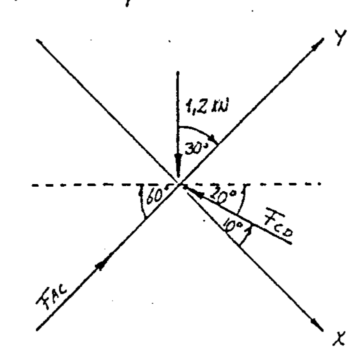
7.- La sigte figura indica un sistema de fijación para sujetar una pieza entre dos paredes. Una fuerza P_1 se aplica en el punto C, a efectos de esta fuerza se se produce una fuerza de compresión P_2 en el recipiente; esta fuerza sujeta el cuerpo W, además se supone que la guia o el émbolo es lisa sin efectos de fricción. Si $P_1 = 1,2$ KN, cual será la fuerza resultante P_2 de compresión ?



Solución:

1.-) Todos los miembros de la máquina excepto D-B son barras de armadura.

2.-) Si adoptamos un sistema de coordenadas (indicado en la fig). Se tiene:



$+\nearrow \Sigma F_y = 0:$

$F_{AC} - 1,2 \cdot Cos\ 30° - F_{CD} \cdot Sen\ 10° = 0$

$F_{AC} - F_{CD}\ Sen\ 10° = 1,04$ ....(1)

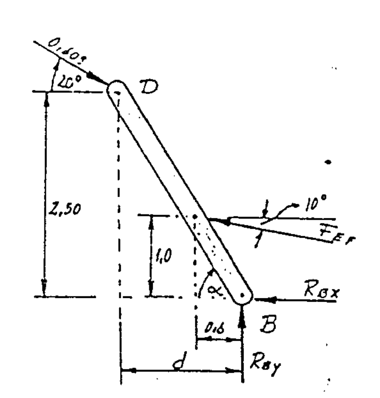
$+\searrow \Sigma F_x = 0:$

$F_{CD} \cdot Cos\ 10° - 1,2 \cdot Sen\ 30° = 0$

$\Rightarrow$ $F_{CD} = 0,609\ [KN]$

Por lo tanto F_{CD} en (1) $\Rightarrow$ $F_{AC} = 1,146\ [KN]$

3).- Dibujamos el diagrama de cuerpo libre del miembro D-B.



Op. Aux. $tg\alpha = \frac{1}{0,6}$ $\Rightarrow$ $\alpha = 59,036°$

Si: $tg\alpha = \frac{2,5}{d}$ $\Rightarrow$ $d = 1,50\ m.$

Ahora: $\circlearrowleft \Sigma M_B = 0:$

$0,609 \cdot Cos\ 20° * 2,5 - 0,609 \cdot Sen\ 20 * 1,5 - F_{EF}[Cos\ 10° * 1 - Sen\ 10° * 0,6] = 0$

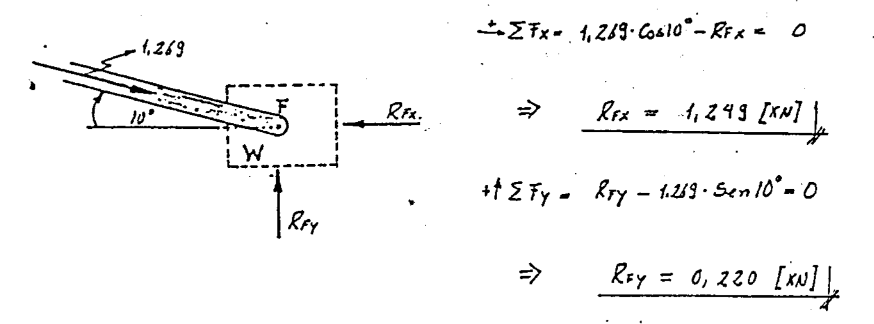
$\Rightarrow$ $F_{EF} = 1,269\ [KN]$

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\ 0,609 \cdot Cos\ 20° - 1,269 \cdot Cos\ 10° - R_{Bx} = 0$

$\Rightarrow$ $R_{Bx} = -0,677\ [KN]$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ R_{By} + 1,269 * Sen\ 10° - 0,609 \cdot Sen\ 20° = 0 \Rightarrow$ $R_{By} = 0,012\ [KN]$

4°) Diagrama de cuerpo libre del émbolo.



$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 1{,}269 \cdot \cos 10° - R_{Fx} = 0$

$\Rightarrow \quad R_{Fx} = 1{,}249\ [KN]$

$+\uparrow \Sigma F_y = R_{Fy} - 1{,}269 \cdot \operatorname{Sen} 10° = 0$

$\Rightarrow \quad R_{Fy} = 0{,}220\ [KN]$

Por lo tanto $R_{Fx} = 1{,}249$ KN, es la fuerza (que) P_2 que ejerce W, o sea la fuerza de compresión.

$R_{FY} = 0{,}22$ [KN] es la fuerza normal al émbolo que se requiere lubricar para disminuir la fricción.

Por lo tanto: $P_2 = 1{,}244$ [KN]

5°) Cálculo de las reacciones y su comprobación.

$\overrightarrow{\Sigma} F_x = R_{Ax} - 1{,}146 \cdot \cos 60° = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0{,}573\ [KN]$

$\uparrow \Sigma F_y = R_{Ay} - 1{,}146 \operatorname{Sen} 60° = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 0{,}992\ [KN]$

Fuerza en los pasadores será:

A = 1,196 [KN]	D = 0,609 [KN]
B = 0,667 [KN]	C = 1,20 [KN]
E = 1,268 [KN]	F = 1,268 [KN]

Por lo tanto, la fuerza máxima E y F = 1,268 [KN]

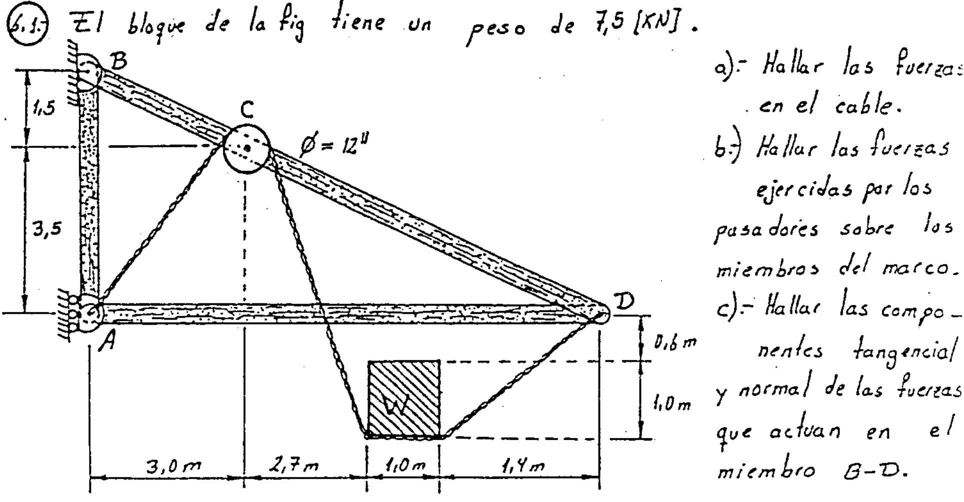
6°) Relación de carga: (P^*)

$$P^* = \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow P^* = \frac{1,244}{1,2} \quad \therefore \boxed{P^* = 1,037}$$

Conclusión: Como se verá no hay mayor incremento de fuerza de comp: ; por lo tanto se debe modificar de la estructura.

PROBLEMAS PROPUESTOS

(6.1.) El bloque de la fig tiene un peso de 7,5 [KN].



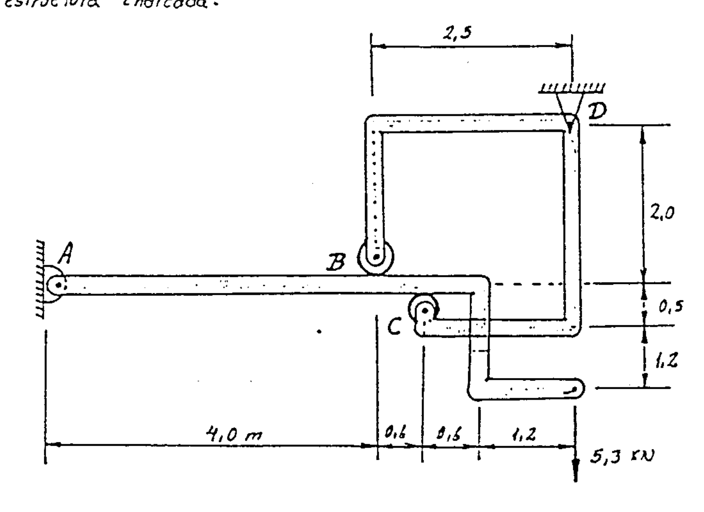
a):- Hallar las fuerzas en el cable.

b.) Hallar las fuerzas ejercidas por los pasadores sobre los miembros del marco.

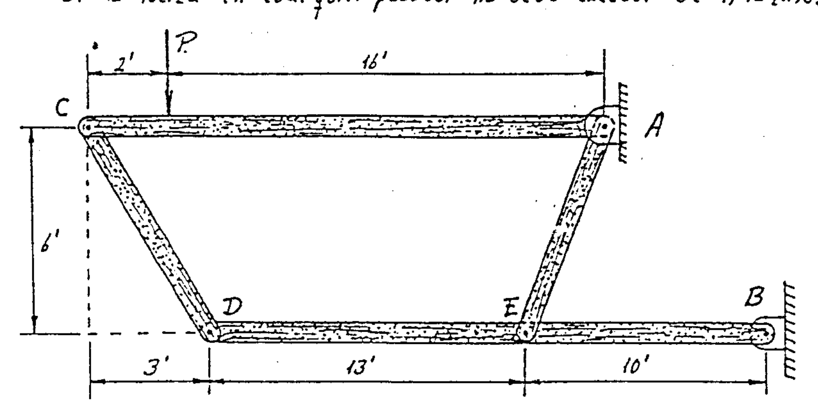
c):- Hallar las componentes tangencial y normal de las fuerzas que actuan en el miembro B-D.

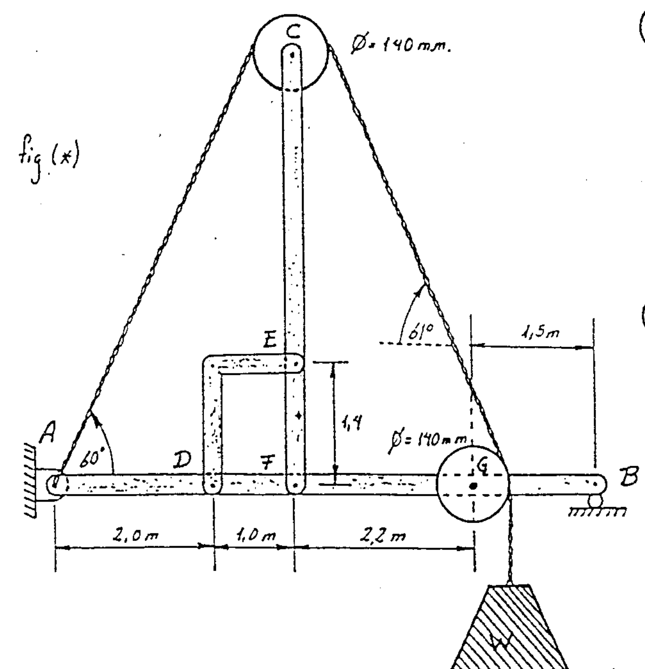
d):- Con los resultados del inicio c), verifique que el miembro B-D está en equilibrio

(6.2.) Encontrar todas las fuerzas que actuan en los pasadores de la estructura indicada.



6.3.- Hallar el valor máximo P que puede soportar mediante el marco de la fig. si la fuerza en cualquier pasador no debe exceder de 1,45 [KN].

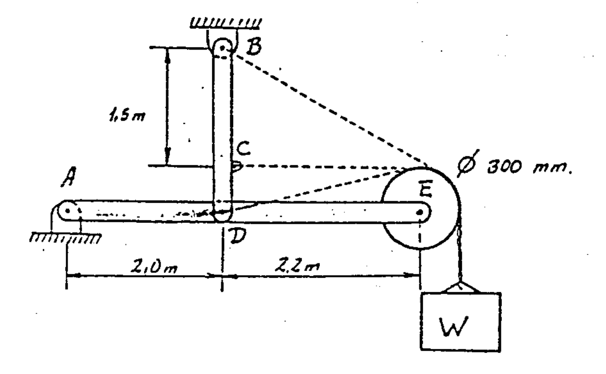




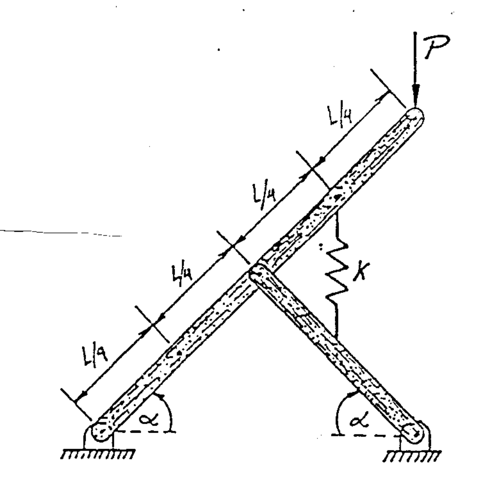
6.4.- Si W = 4780 Kg masa en la estructura mostrada en la fig (*). Calcular las fuerzas ejercidas en los pasadores.

6.5.- En la fig (*) la polea que se encuentra en G. debe soportarse temporalmente en F.
¿Este apoyo dará esfuerzos mayores que el método original.?

(6.6:) Si $W = 8000$ lb y la conexión se puede realizar tanto en B, C, y D. Encontrar las fuerzas ejercidas en los pasadores para cada posición de carga. ¿Cual de las conexiones es más favorable?



(6.7:) Si la longitud del resorte sin estirar es L_0. Demostrar que si el sistema está en equilibrio, el ángulo α satisface la sigte relación:



$$\operatorname{Sen} \alpha = 2 \cdot \left[L_0 - \frac{2P}{K} \right] / L$$

CENTROS DE GRAVEDAD

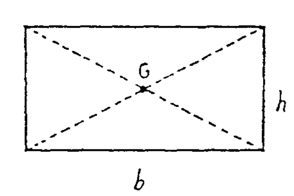


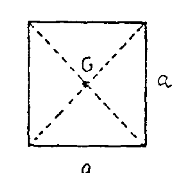
7,1 GENERALIDADES :

En este capítulo se estudiará el método para determinar la ubicación del centro de gravedad (G) y el centro de masas de un sistema de partículas discretas. Luego se hará extensiva su aplicación a un cuerpo de forma arbitraria. El mismo procedimiento de análisis se empleará para determinar el centro geométrico ó centroide de LINEAS, AREAS y VOLUMENES. Una vez ubicado el centroide se explicará como obtener el área y volumen de una superficie de revolución. que son muy aplicados en el campo de la ingeniería.

7,2 CENTROS DE GRAVEDAD DE AREAS REGULARES Y SIMETRICAS

El centro de gravedad de áreas regulares y simétricas (fig. geométricas conocidas) tales como : rectangulos, cuadrados, circulos, etc. coinciden con su centro geométrico así :





7,2,1 Momentos de Primer Orden :

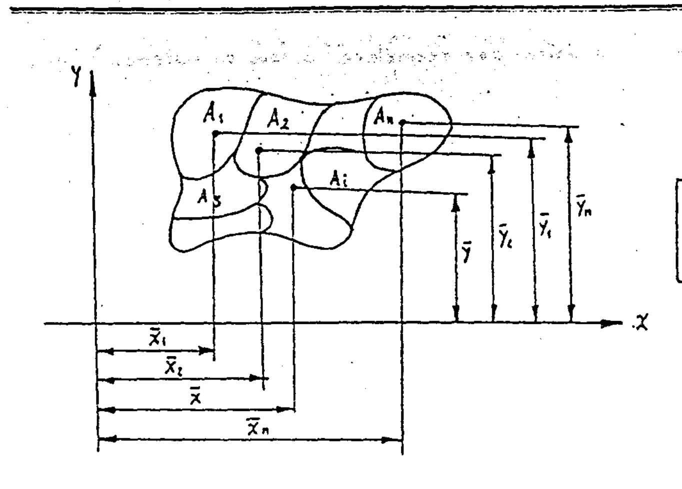
Si se tiene por ejemplo un área cualquiera, referido a un sistema de ejes cartecianos a su vez esta puede subdividirse en varios áreas conocidas A_1, A_2, A_3, ... A_i, ... A_n. Se llama momento de primer orden : " Al producto de dicha al eje conciderado "

Así :

$$S_x = A_1 \cdot Y_1 + A_2 \cdot Y_2 + A_3 \cdot Y_3 + \cdots + A_i \cdot Y_i + \cdots + A_n \cdot Y_n.$$

En resumen:

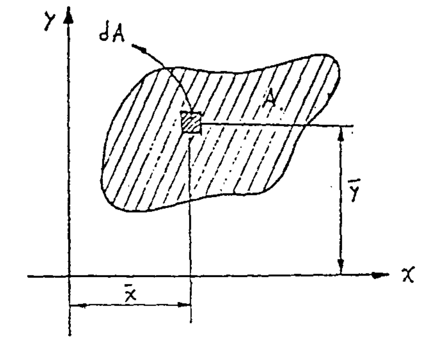
$$\boxed{S_x = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot Y_i}$$



En forma similar con respecto al eje "y" será:

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i$$

Por otra parte si un área definida por el contorno $Y = f(x)$; se lleva a un elemento infinitesimal se tiene :



$$\Rightarrow \quad d S_x = y\, dA$$

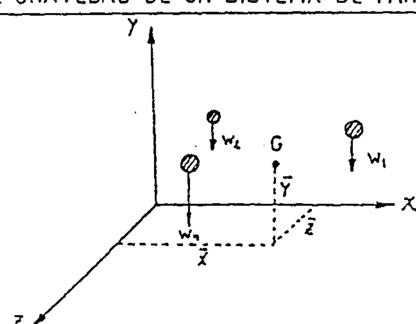
$$\int dS_x = \int y\, dA \quad \therefore \quad S_x = \int_A y\, dA$$

En forma similar : $S_y = \int_A x\, dA$

Donde :

S_x y S_y , se denominan momentos estáticos de primer orden respecto a los ejes X e Y respectivamente.

7.3.- CENTRO DE GRAVEDAD DE UN SISTEMA DE PARTICULAS :



Si consideramos un sistema de "n" particulas fijas contenidos en el espacio como se muestra en la fig anterior. Los pesos W_1, W_2 y W_n forman un sistema de fuerzas paralelas que pueden ser reemplazados por una fuer

fuerza única. W_R. (como un peso único que reemplace a todo un sistema.) que actua. en un punto único G, que es el punto de aplicación que tiene por coordenadas. $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$; A este punto se llama. "CENTRO DE GRAVEDAD" (G.). Para conocer sus coordenadas. se debe aplicar los principios estudiados en capitulos anteriores.

Se tiene entonces :

$$\bar{x} \cdot W_R = \bar{x}_1 \cdot W_1 + x_2 \cdot W_2 + \cdots\cdots + x_i \cdot W_i$$

En forma resumida se tiene:

$$W_R = W_1 + W_2 + \cdots\cdots + W_i = \sum W_i$$

Por lo tanto :

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot W_i}{\sum W_i}}$$

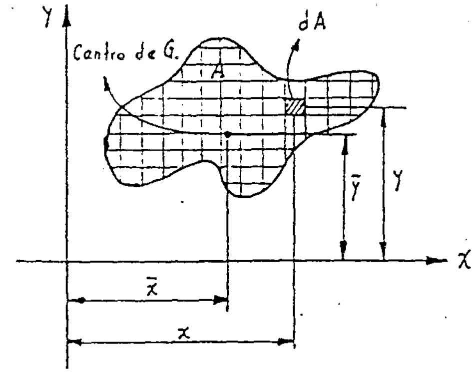
En forma similar:

$$\boxed{\bar{y} = \frac{\sum y_i \cdot W_i}{\sum W_i}}$$

$$\boxed{\bar{z} = \frac{\sum z_i \cdot W_i}{\sum W_i}}$$

7.4.- CENTROS DE GRAVEDAD DE UN AREA CON DENSIDAD UNIFORME :

Si se considera por ejemplo un area definida., además de densidad constante se tiene según la figura.



El centro de gravedad de una placa, cascarón etc., puede determinarse subdividiendo el área en elementos diferenciales $dA = dx \cdot dy$ y calculando los momentos estáticos de estos elementos de área con respecto a los ejes Coordenados, llamados :

$\bar{y} \cdot A = y dA$ pero: $A = \int dA$

Además. $dA = dx \cdot dy$

Por lo tanto: $\bar{y} = \dfrac{\iint y\, dx \cdot dy}{\iint dx \cdot dy}$

En Resumen: $\boxed{\bar{y} = \dfrac{\iint y\, dx \cdot dy}{\iint dx \cdot dy}}$ en forma similar: $\boxed{\bar{x} = \dfrac{\iint x \cdot dx \cdot dy}{\iint dx \cdot dy}}$

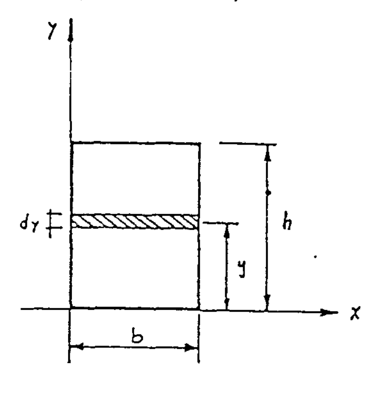
Si tenemos un area enel espacio se tiene:

$$\boxed{\bar{z} = \frac{\int z\, dA}{\int dA.}}$$

Se aumenta una tercera coordenada:

Ejemplos:

(1.-) Demostrar que el centro de gravedad de un rectangulo es. $\frac{b}{2}$ y $\frac{h}{2}$ respectivamente.



En la figura rectangular de lados b y h se tiene $dA = b \cdot dy$.

Aplicando el concepto por definición, se tiene:

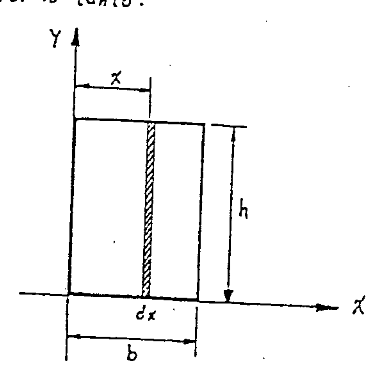
$A\bar{y} = \int y\, dA$; $\bar{y} = \dfrac{\int_0^h y \cdot b \cdot dy}{A}$ pero $A = b \cdot h$.

Entonces:

$$\bar{y} = \frac{b\left(\frac{y^2}{2}\right|_0^h}{b \cdot h} = \frac{bh^2}{2bh} \Rightarrow \boxed{\bar{y} = \frac{h}{2}}$$ l.q.q.d.

Del mismo modo podemos demostrar para $\bar{x}$.

Por lo tanto:



Aplicando la definición:

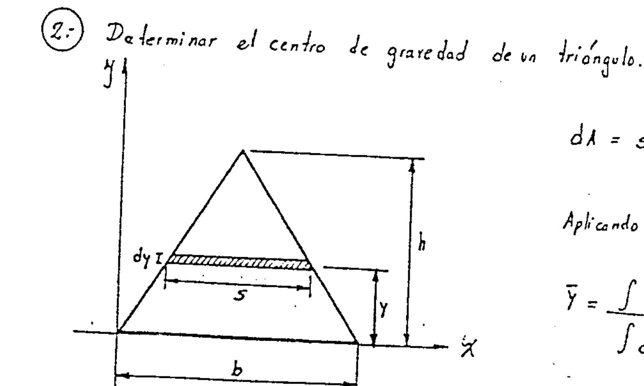
$$dA = h\,dx \;;\quad \bar{x} = \frac{\int_0^b x\,dA}{A} = \frac{\int_0^b x\,h\,dx}{b\cdot h}$$

Se tiene:

$$\bar{x} = \frac{h\left(\frac{x^2}{2}\right|_0^b}{b\cdot h} = \frac{h\cdot b^2}{2\cdot b\cdot h}$$

Entonces: $\boxed{\bar{x} = \frac{b}{2}}$ l.q.q.d.

(2.) Determinar el centro de gravedad de un triángulo.



$dA = s\,dy$ además: $A = \frac{1}{2}\,b\,h.$

Aplicando definiciones se tiene:

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{\int dA} \quad (*)$$

hallamos s por semejanza de triangulos.

$$\frac{b}{s} = \frac{h}{h-y} \Rightarrow s = \frac{b}{h}(h-y)$$

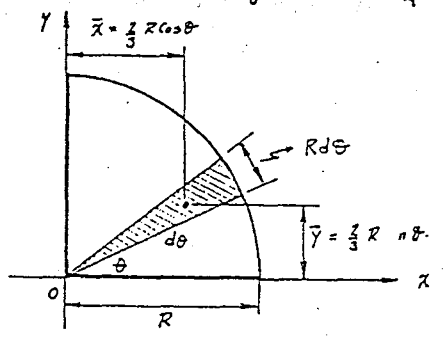
Reemplazando en $(*)$ el valor de s:

$$\bar{y} = \frac{\int y\cdot s\,dy}{\int s\,dy} = \frac{\int_0^h y\cdot\frac{b}{h}(h-y)\,dy}{\int_0^h \frac{b}{h}(h-y)\,dy} = \frac{\frac{b}{h}\int_0^h (hy-y^2)\,dy}{\frac{b}{h}\int_0^h (h-y)\,dy}$$

$$\bar{y} = \frac{\left(\frac{h}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right|_0^h}{\left(hy - \frac{y^2}{2}\right|_0^h} = \frac{\frac{1}{6}h^3}{\frac{1}{2}h^2} \Rightarrow \boxed{\bar{y} = \frac{1}{3}h}$$

Lo cual significa que el centro de gravedad de un triángulo se encuentra a $\frac{1}{3}h$ de la base y a una distancia de $\frac{2}{3}h$ del vértice.

3.- Localizar el centro de gravedad de $\frac{1}{4}$ de circunferencia, según muestra la fig.



Hay varias formas de escoger un elemento diferencial, en este caso se escogerá un elemento diferencial triangular; este elemento tiene su centro de gravedad G. cuyas coordenadas son: $\bar{x}$ y $\bar{y}$ respectivamente.

$$\therefore \quad dA = \frac{1}{2} R \cdot R d\theta = \frac{1}{2} R^2 d\theta$$

Utilizando definiciones se tiene:

$$\bar{x} = \frac{\int \bar{x}\, dA}{\int dA} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\cos\theta \cdot R \cdot \frac{1}{2} R^2 d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} R^2 d\theta} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot R \cdot R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta}{\frac{1}{2}\cdot R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta}$$

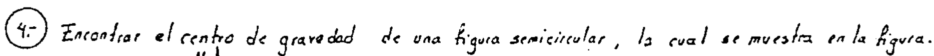
$$\bar{x} = \frac{\frac{2}{3} R \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi/2} d\theta} = \frac{\frac{2}{3} R \left(\operatorname{Sen}\theta\right|_0^{\frac{\pi}{2}}}{\left(\theta\right|_0^{\pi/2}} = \frac{\frac{2}{3} R}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{4R}{3\pi}}$$

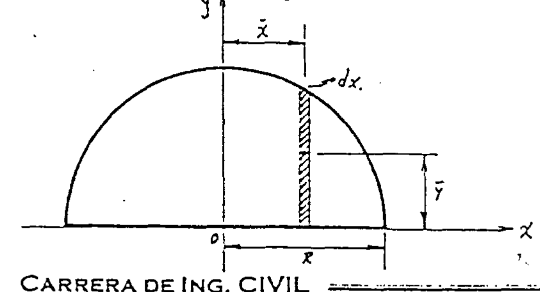
De la misma forma:

$$\bar{y} = \frac{\int \bar{y}\, dA}{\int dA} = \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{2}{3} R \operatorname{Sen}\theta \cdot \frac{1}{2} R^2 d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} R^2 d\theta} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot R \cdot R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Sen}\theta\, d\theta}{\frac{1}{2} R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{2}{3} R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Sen}\theta\, d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta} = \frac{\frac{2}{3} R \left(-\operatorname{Cos}\theta\right|_0^{\frac{\pi}{2}}}{\left(\theta\right|_0^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{\frac{2}{3} R}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}}$$

Lo que significa que tanto $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son iguales:


4.- Encontrar el centro de gravedad de una figura semicircular, la cual se muestra en la figura.



En figuras simétricas una de las coordenadas estará en el eje de simetría, por lo tanto:

$$\boxed{\bar{x} = 0}$$

Un arco semicircular con centro en O es conocido su ecuación. que es lo sigte:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Por lo tanto tomando un elemento diferencial, se tiene.
donde:

$\bar{x}, \bar{y}$ son coordenadas del elemento diferencial

Siendo: $\left.\begin{array}{l} \bar{x} = x. \\ \bar{y} = \frac{y}{2} \end{array}\right\}$; $\quad y = \sqrt{R^2 - x^2}$

si: $\quad dA = y\,dx \quad \Rightarrow \quad A = \int y\,dx. \quad = \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx.$

Para resolver la integral hacemos un cambio de variable:

$$x = R\,sen\,\theta \quad \rightarrow \quad dx = R\cos\theta\,d\theta. \quad \text{(tambien Cambian los límites)}$$

Entonces: $\quad A = \int_0^{\pi} \sqrt{R^2 - R^2 sen^2\theta} \cdot R\cos\theta\,d\theta. \quad = \int_0^{\pi} \sqrt{R^2(1 - sen^2\theta)} \cdot R\cos\theta\,d\theta$

$$A = \int_0^{\pi} R^2 \sqrt{1 - sen^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\pi} R^2 \cos^2\theta . d\theta \qquad si: \cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$A = \int_0^{\pi} \frac{R^2}{2}(1 + \cos 2\theta)d\theta = \frac{R^2}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\,sen\,\theta \cdot \cos\theta\right|_0^{\pi} = \frac{R^2}{2}\left(\pi + \frac{1}{2} sen\,\pi \cos\pi - \frac{1}{2} sen\,0 \cos 0\right)$$

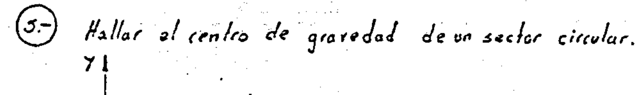
$$\boxed{A = \frac{\pi R^2}{2}}$$

Por lo tanto aplicamos definiciones para hallar $\bar{x}$ e $\bar{y}$ pero $\bar{x} = 0$

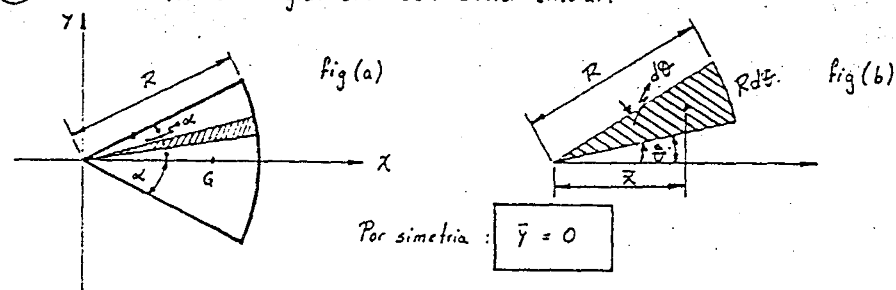
$$A\bar{y} = \int y\,dA \quad = \int_{-R}^{R} \frac{y}{2} \cdot y\,dx. \quad = \int_{-R}^{R} y^2 dx. \quad = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\,dx.$$

$$A\bar{y} = \frac{1}{2}\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right|_{-R}^{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}R^3 + \frac{2}{3}R^3\right) = \frac{2}{3}R^3$$

Por lo tanto: $\quad si \quad A = \frac{1}{2}\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = \dfrac{\frac{2}{3}R^3}{\frac{1}{2}\pi R^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}}$



5.- Hallar el centro de gravedad de un sector circular.



Por simetria : $\boxed{\bar{y} = 0}$

Se escogerá un elemento diferencial indicado en la figura (a), por lo tanto se tiene según la fig (b) el sigte. caso.

$$dA = \frac{1}{2} R \cdot R d\theta = \frac{1}{2} R^2 d\theta \qquad (*)$$

donde: $x_e = \frac{2}{3} R \cos\theta$; siendo x_e = absisa del elemento diferencial ( )

Integrando (*) ; $A = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{2} R^2 d\theta = \frac{1}{2} R^2 (\theta \Big|_{-\alpha}^{+\alpha} = \frac{1}{3} R^2 (\alpha - (-\alpha))$

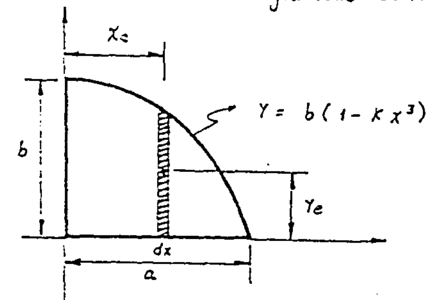
Por tanto : $\boxed{A = R^2 \cdot \alpha.}$

Aplicando definición de centro de gravedad se tiene:

$$A\bar{x} = \int x_e \, dA = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{2}{3} R^3 \cos\theta \frac{d\theta}{2} = \frac{1}{3} R^3 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\theta \, d\theta.$$

$$A\bar{x} = \frac{1}{3} R^3 (\operatorname{sen}\theta \Big|_{-\alpha}^{+\alpha} = \frac{1}{3} R^3 (2 \operatorname{sen}\alpha) \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{2R \operatorname{sen}\alpha}{3\alpha}.}$$

6.- Encontrar el centro de gravedad de la siguiente figura.



Si: $x_e = x \wedge y_e = \frac{y}{2}$

Además: $dA = y \, dx$

Entonces: $dA = b(1 - Kx^3) \, dx$.

Por definición:

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{\int_0^a x\cdot b(1-Kx^3)\,dx}{\int_0^a b(1-Kx^3)\,dx} = \frac{b\int_0^a (x-Kx^4)\,dx}{b\int_0^a (1-Kx^3)\,dx}$$

$$\bar{x} = \frac{\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{K}{5}x^5\right|_0^a}{\left(x-\frac{K}{4}x^4\right|_0^a} = \frac{\frac{1}{2}a^2 - \frac{K}{5}a^5}{a-\frac{K}{4}a^4} = \frac{2}{5}\,\frac{(5a-2Ka^4)}{(4-Ka^3)}$$

si $Y=0 \Rightarrow x=a$ ∴ $0 = b(1-Ka^3) \Rightarrow$ $\boxed{K = \frac{1}{a^3}}$

Reemplazando: se tiene. $\boxed{\bar{x} = \frac{2}{5}a}$

De la misma forma:

$$A\bar{y} = \int Y_e\,dA = \int \tfrac{1}{2}y\,dA = \int \tfrac{1}{2}y^2\,dx \qquad \text{pero: } dA = b(1-Kx^3)\,dx.$$

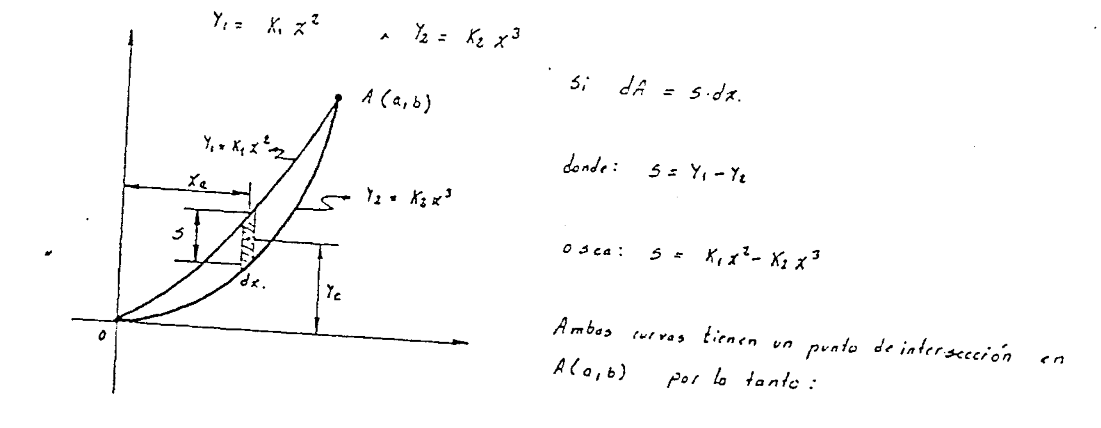
$$A\bar{y} = \frac{1}{2}\int_0^a b^2(1-Kx^3)^2\,dx. = \frac{b^2}{2}\int_0^a (1-2Kx^3+K^2x^6)\,dx.$$

$$A\bar{y} = \frac{b^2}{2}\left(x - \frac{1}{2}Kx^4 + \frac{1}{7}K^2x^7\right|_0^a = \frac{b^2}{2}\left(a - \frac{1}{2}Ka^4 + \frac{1}{7}K^2a^7\right)$$

Realizando operaciones se tiene. $\boxed{\bar{y} = \frac{3}{7}b}$

7.- Determinar el centroide del área producida por la intersección de las dos curvas:

$Y_1 = K_1 x^2$ ∧ $Y_2 = K_2 x^3$



Si $dA = s\cdot dx.$

donde: $s = Y_1 - Y_2$

o sea: $s = K_1x^2 - K_2x^3$

Ambas curvas tienen un punto de intersección en A(a, b) por lo tanto:

Si: $x = a \quad , \quad y_1 = b \quad \Rightarrow \quad b = K_1 \cdot a^2 \quad \Rightarrow K_1 = \dfrac{b}{a^2}$

además: $x = a \, , \quad y_2 = b \quad \Rightarrow \quad b = K_2 a^3 \quad \rightarrow K_2 = \dfrac{b}{a^3}$

Por lo tanto: $\quad S = \dfrac{b}{a^2} x^2 - \dfrac{b}{a^3} x^3$

Entonces: $\quad dA = \left(\dfrac{b}{a^2} x^2 - \dfrac{b}{a^3} x^3 \right) dx.$

Luego: $\quad A = \int_0^a \dfrac{b}{a^2} x^2 dx - \int_0^a \dfrac{b}{a^3} x^3 dx = \dfrac{b}{a^2} \left(\dfrac{1}{3} x^3 \Big|_0^a - \dfrac{b}{a^3} \left(\dfrac{1}{4} x^4 \Big|_0^a \right.\right.$

$$A = \frac{1}{3} \frac{b}{a^2} a^3 - \frac{1}{4} \frac{b}{a^3} a^4 = \frac{4ab - 3ab}{12} \Rightarrow \boxed{A = \frac{ab}{12}.}$$

Luego: según la figura $\quad x_e = x \quad$ y $\quad Y_e = \dfrac{S}{2} + Y_2 \Rightarrow Y_e = \dfrac{Y_1 + Y_2}{2}$

Aplicando la definición:

$$A \cdot \bar{x} = \int x_e \, dA. = \int x \cdot y \, dx$$

$$A \cdot \bar{x} = \int_0^a x \left(\frac{b}{a^2} x^2 - \frac{b}{a^3} x^3 \right) dx = \frac{b}{a^2} \int_0^a x^3 dx - \frac{b}{a^3} \int_0^a x^4 dx$$

Realizando operaciones. $A \cdot \bar{x} = \dfrac{a^2 b}{20} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{x} = \dfrac{3}{5} a}$

Por otro lado:

$$A\bar{y} = \int Y_e \, dA = \int \frac{1}{2} (Y_1 + Y_2) \, dA = \int \frac{1}{2} (Y_1 + Y_2) \left(\frac{b}{a^2} x^2 - \frac{b}{a^3} x^3 \right) dx.$$

$$A\bar{y} = \frac{1}{2} \int_0^a \left(\frac{b}{a^2} x^2 + \frac{b}{a^3} x^3 \right) \left(\frac{b}{a^2} x^2 - \frac{b}{a^3} x^3 \right) dx$$

$$A\bar{y} = \frac{1}{2} \int_0^a \left[\left(\frac{b}{a^2} x^2 \right)^2 - \left(\frac{b}{a^3} x^3 \right)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^a \left(\frac{b^2}{a^4} x^4 - \frac{b^2}{a^6} x^6 \right) dx$$

$$A\bar{y} = \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^4} \int_0^a x^4 dx - \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^6} \int_0^a x^6 dx = \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^4} \left(\frac{1}{5} x^5 \Big|_0^a - \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^6} \left(\frac{1}{7} x^7 \Big|_0^a \right.\right.$$

$$A\bar{y} = \frac{1}{10} \frac{b^2}{a^4} a^5 - \frac{1}{14} \frac{b^2}{a^6} \cdot a^7 = \frac{1}{10} ab^2 - \frac{1}{14} ab^2 = \frac{14ab^2 - 10ab^2}{140}$$

Entonces: $\quad \dfrac{ab}{12} \bar{y} = \dfrac{1}{35} ab^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{y} = \dfrac{12}{35} b}$

8.- Hallar las coordenadas del centroide del area limitada por las curvas:

$x = 4y^2 \quad \wedge \quad y = \frac{1}{4}x$

Encontramos el punto de intersección entre las dos curvas.

$\therefore \quad x = 4\left(\frac{1}{4}x\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 - x = 0$

$\Rightarrow \quad x\left(\frac{1}{4}x - 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 4$

Además: si $x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$

$x_2 = 4 \Rightarrow y_2 = 1$

Por lo tanto el punto deseado es: $P(4, 1)$

Aplicamos definiciones para hallar las coordenadas del centro de gravedad.

$$dA = s \cdot dx \quad , \quad \text{pero} \quad s = \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{4}x$$

Entonces: $dA = \left(\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{4}x\right)dx \Rightarrow A = \int_0^4 \frac{1}{2}\sqrt{x}\,dx - \int_0^4 \frac{1}{4}x\,dx.$

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^4 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x^2\Big|_0^4 = \frac{8}{3} - 2 \Rightarrow \boxed{A = \frac{2}{3} = 0,667\ u^2}\right.\right.$$

Por lo tanto: si $x_e = x$; $y_e = \frac{s}{2} + \frac{1}{4}x \Rightarrow y_e = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{4}x}{2} + \frac{1}{4}x \Rightarrow y_e = \frac{1}{8}(\sqrt{x} + x)$

$$A \cdot \bar{x} = \int x_e\,dA = \int x \cdot s\,dx.$$

$$A \cdot \bar{x} = \int_0^4 x\left(\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{4}x\right)dx = \int_0^4 \frac{1}{2}x^{3/2} - \int_0^4 \frac{1}{4}x^2\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^4 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x^3\Big|_0^4\right.\right.$$

$$A \cdot \bar{x} = \frac{1}{5}4^{5/2} - \frac{1}{12}4^3 \Rightarrow \frac{2}{3}\bar{x} = \frac{16}{15} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{8}{5} = 1,6}$$

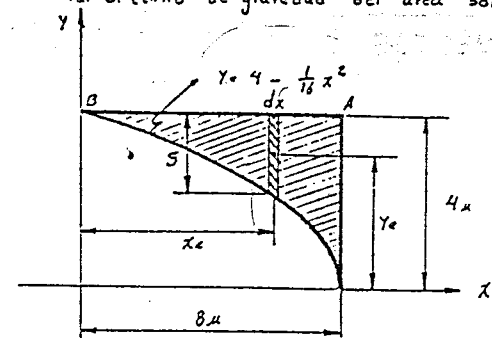
De la misma manera:

$$A \cdot \bar{y} = \int y_e\,dA = \int s \cdot \left(\frac{1}{8}(\sqrt{x} + x)\right)dx. = \frac{1}{8}\int_0^4 (\sqrt{x} + x)\left(\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{4}x\right)dx$$

Realizando op's: $A \cdot \bar{y} = \frac{1}{8}\int_0^4 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^2\right)dx = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{10}x^{5/2} - \frac{1}{12}x^3\Big|_0^4\right.$

$$\frac{2}{3}\bar{y} = \frac{1}{8}\left(\frac{28}{15}\right) \Rightarrow \boxed{\bar{y} = \frac{7}{20} = 0,35}$$

9.- Hallar el centro de gravedad del área sombreada de la siguiente figura.



El elemento diferencial tiene por coordenadas x_e, y_e ;

Además $S = 4 - Y$ (*)

donde $x_e = x$

de (*) $S = 4 - 4 + \frac{1}{16}x^2 = \frac{1}{16}x^2$

La recta B-A tiene por ecuación. $Y = 4$

Luego: $dA = S\,dx = \frac{1}{16}x^2 dx.$

Entonces: $A = \int_0^8 \frac{1}{16}x^2\,dx = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{3}x^3\right|_0^8$ $\Rightarrow$ $A = \frac{32}{3} = 10{,}667\ u^2$

Por lo tanto aplicando definiciones:

$$A\bar{x} = \int x_e\,dA = \int_0^8 x\cdot\frac{1}{16}x^2\,dx = \frac{1}{16}\int_0^8 x^3 dx$$

$$A\bar{x} = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}x^4\right|_0^8 \Rightarrow \frac{32}{3}\bar{x} = 64$$ osea: $\bar{x} = 6\ u.$

Si $Y_e = \frac{S}{2} + Y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}x^2\right) + 4 - \frac{1}{16}x^2$

Osea: $Y_e = 4 - \frac{1}{32}x^2$

Por lo tanto de la misma manera:

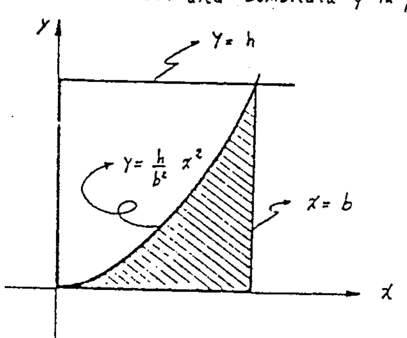
$$A\bar{y} = \int Y_e\,dA = \int_0^8\left(4 - \frac{1}{32}x^2\right)\frac{1}{16}x^2dx. = \int_0^8\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{512}x^4\right)dx.$$

$$A\bar{y} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x^3\right|_0^8 - \frac{1}{512}\left(\frac{1}{5}x^5\right|_0^8 = \frac{448}{15}$$

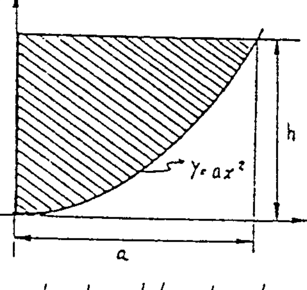
Entonces: $\frac{32}{3}\bar{y} = \frac{448}{15}$ o sea: $\bar{y} = \frac{14}{5} = 2{,}8\ u$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Encontrar el centroide del área sombreada y la parte sin sombrear.

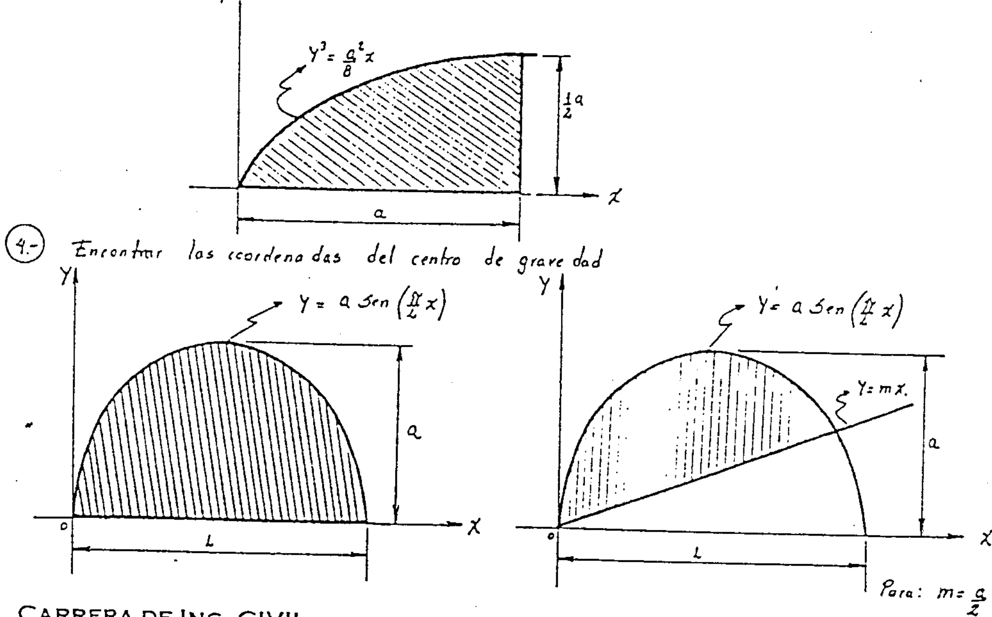


2.- Ubicar el centroide del área parabólica.

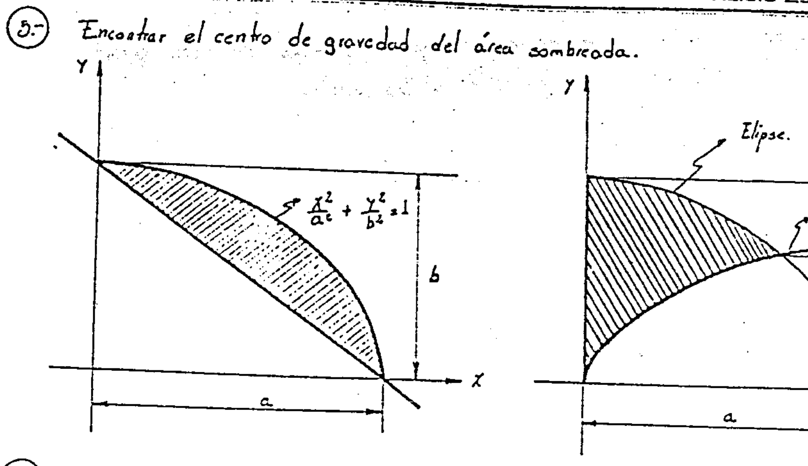


3.- Encontrar las coordenadas del centro de gravedad de la figura siguiente.

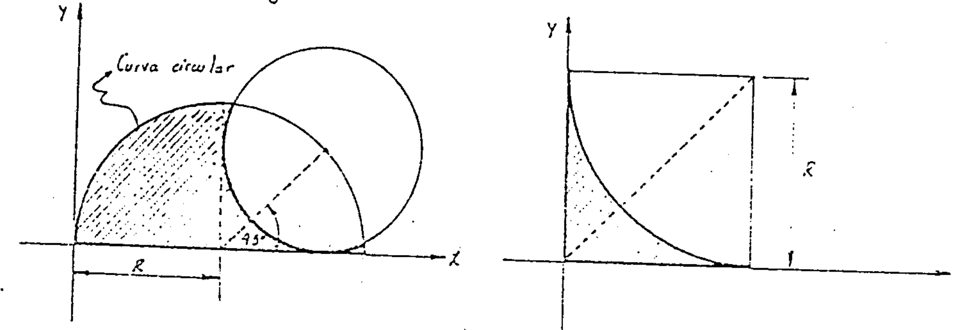
4.- Encontrar las coordenadas del centro de gravedad



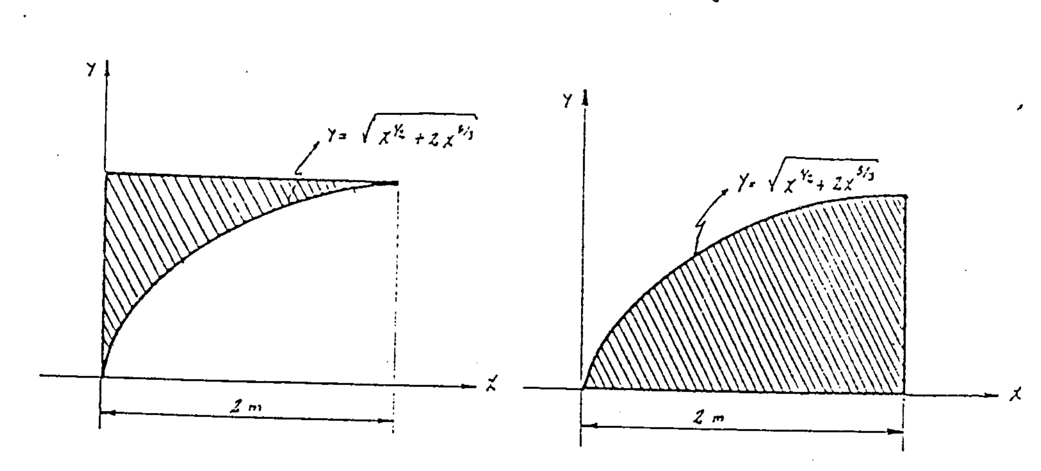
5.- Encontrar el centro de gravedad del área sombreada.



6.- Ubicar el centro de gravedad.



7.- Ubicar el centro de gravedad del área sombreada, mediante integración.



8.- La placa de acero tiene 0.3 m de espesor y una densidad de 7850 Kg/m³. Determinar la ubicación del centro de gravedad y las reacciones de apoyo.

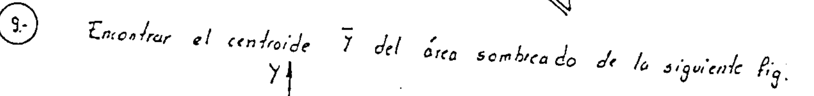
$y^2 = 2x$

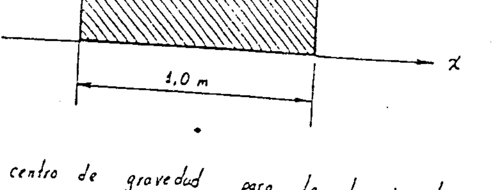
$y = -x$

2 m.

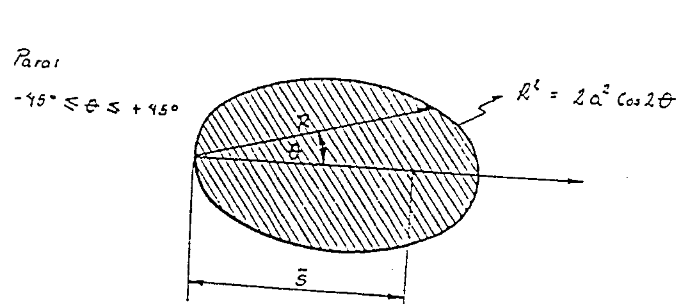
2 m.

9.- Encontrar el centroide $\bar{Y}$ del área sombreada de la siguiente fig.





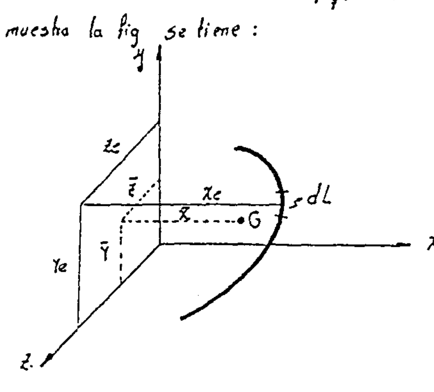
10.- Determinar el centro de gravedad para la lemniscata.



7.5.- CENTROS DE GRAVEDAD DE LINEAS:

A : LINEA CONTINUA Y HOMOGENEA:

7.5.1.- GENERALIDADES:- Si la geometría de un objeto, por ejemplo una varilla delgada o un alambre, que toma la forma de una linea continua y homogenea según muestra la fig se tiene:



Se escoge un dL (diferencial de longitud) que tiene por coordenadas x_e, y_e, y z_e respectivamente.

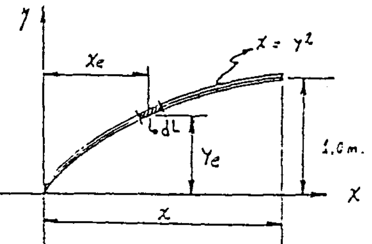
Nota.- En este caso el centro de gravedad no necesariamente debe estar sobre la Linea., sino fuera de ella. tal como indica. la figura (el punto G. que tiene por coordenadas $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ respectivamente)

Entonces, se tiene:

$$\bar{x} = \frac{\int_L x_e \, dL}{\int_L dL} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\int_L y_e \, dL}{\int_L dL} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{\int_L z_e \, dL}{\int_L dL}$$

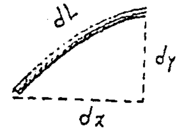
7.5.2.- EJE DE SIMETRIA:- En el caso de figuras planas el centro de gravedad G. necesariamente se encuentra dentro de esta área, en este caso no se encuentra. en la linea. sino fuera de ésta. área.

Ejemplo: Encontrar el centro de gravedad. de una varilla doblada. en forma de un arco parabólico según muestra la figura siguiente:



1°.) Se toma un elemento dL diferencial de longitud. ubicado según muestra la figura. que tiene por coordenadas x_e, y_e respectivamente.

2°) Este elemento diferencial puede expresarse en términos de dx y dy, según muestra la figura siguiente.



$$(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \Rightarrow dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

si en el término $(dx)^2 + (dy)^2$ se divide entre $(dy)^2$

se tiene.

$$\left(\frac{dL}{dy}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2 \Rightarrow dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + 1} \cdot dy. \quad (*)$$

Por lo tanto derivando $x = y^2$ se tiene: $\frac{dx}{dy} = 2y$

Luego reemplazando en $(*)$:

$$dL = \sqrt{(2y)^2 + 1} \cdot dy.$$

Además, el centro de gravedad del elemento diferencial es: $x_e = x$, $y_e = y$

Se tiene:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x\,dL}{\int_0^1 dL} = \frac{\int_0^1 y^2 \cdot \sqrt{4y^2+1}\,dy}{\int_0^1 \sqrt{4y^2+1}\,dy}$$

Pero antes podemos calcular L.

$$L = \int_0^1 \sqrt{4y^2+1}\,dy = \int_0^1 \sqrt{(2y)^2+1}\,dy \quad ; \text{ haciendo Ca. Va. } u = 2y$$

$$\frac{du}{2} = dy.$$

Entonces:

$$L = \frac{1}{2}\int \sqrt{u^2+1}\,du \quad , \text{ haremos sust. Trig. } u = tg\,\theta. \Rightarrow du = sec^2\theta\,d\theta.$$

$$L = \frac{1}{2}\int \sqrt{tg^2\theta+1} \cdot sec^2\theta\,d\theta = \int \sqrt{sec^2\theta} \cdot sec^2\theta\,d\theta. = \int sec^3\theta\,d\theta.$$

$$L = \int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\, tg\theta + \frac{1}{2}\cdot\int \sec\theta\, d\theta.$$ (se integró por partes).

$$L = \frac{1}{2}\sec\theta\, tg\theta + \frac{1}{2}\ln(\sec\theta + tg\theta)$$

$\mu = tg\theta$ (triángulo: catetos 1 y μ, hipotenusa $\sqrt{1+\mu^2}$, ángulo θ)

Llevando a sus variables originales: $\sec\theta = 1/\sqrt{1+\mu^2}$

$$L = \frac{1}{2}\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} + \mu\right)$$ además: $\mu = 2y$.

$$L = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{\sqrt{1+4y^2}} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+2y\sqrt{1+4y^2}}{\sqrt{1+4y^2}}\right)\right]_0^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$$

Por lo tanto: $L = 1,479 \ (m)$

La integral:

$$L\bar{x} = \int_0^1 y^2\sqrt{4y^2+1}\, dy.$$ si sustituimos: $2y = u \Rightarrow y = \frac{u}{2}$, $dy = \frac{1}{2}du$

$$L\bar{x} = \int_0 \frac{u^2}{4}\sqrt{u^2+1}\,\frac{1}{2}du$$ Tiene la forma. ...... $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx$

$$\Rightarrow L\bar{x} = \frac{1}{8}\int u^2\sqrt{u^2+1}\, du.$$ Resolviendo con (sust. trigonométrica) se tiene.

$$L\bar{x} = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}u\sqrt{(1+u^2)^3} - \frac{1}{8}x\sqrt{1+u^2} - \frac{1}{8}\ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)\right]$$ pero: $u = 2y$

$$L\bar{x} = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}y\sqrt{(1+(2y)^2)^3} - \frac{1}{8}\cdot 2y\sqrt{(1+4y^2)} - \frac{1}{8}\ln\left(2y + \sqrt{1+4y^2}\right)\right]$$

$$L\bar{x} = \frac{1}{16}\left\{y\sqrt{(1+4y^2)^3} - \frac{1}{2}y\sqrt{(1+4y^2)} - \frac{1}{4}\ln\left(2y + \sqrt{1+4y^2}\right)\right|_0^1$$

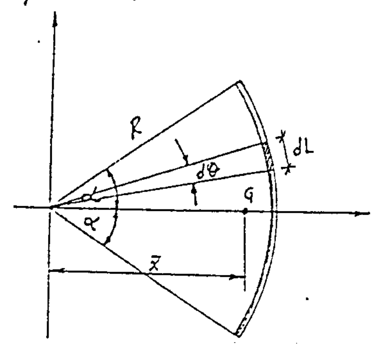
$$L\bar{x} = \frac{1}{16}\left(\sqrt{5^3} - \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right) - \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{1}\right)\right) = 0,746.$$

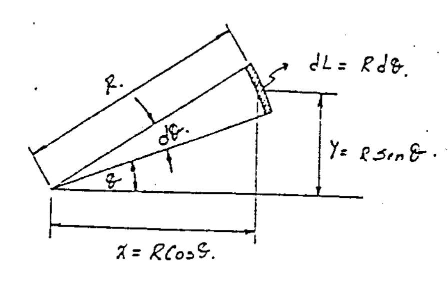
Por lo tanto: $1,479\bar{x} = 0,746 \Rightarrow$ $\bar{x} = 0,504 \ (m)$

De la misma forma: $\bar{y} = \dfrac{\int_0^1 y\, dL}{\int_0^1 dL} = 1,479\bar{y} = 0,848$

$\Rightarrow$ $\bar{y} = 0,573 \ (m)$

1.- Ubicar el centro de gravedad de una varilla que tiene la forma circular de angulo α y radio R.





Para la solución de este problema. es recomendable usar coordenadas polares, por ser arco circular.

Aplicando: $dL = Rd\theta$ (por ser arco diferencial)

Por definición.
$$\bar{x} = \frac{\int x_e\, dL}{\int dL} = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R\cos\theta \cdot R d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} R\, d\theta}$$

$$\bar{x} = \frac{R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta\, d\theta}{R \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \frac{R\,(\operatorname{Sen}\theta\,|_{-\alpha}^{\alpha}}{(\theta\,|_{-\alpha}^{\alpha}} = \frac{2\,R\operatorname{Sen}\alpha}{2\alpha}$$

Por lo tanto:
$$\boxed{\bar{x} = \frac{R\operatorname{Sen}\alpha}{\alpha}}$$

2.- A partir del resultado anterior, hacer extensivo para un cuarto de circunferencia. y media circunferencia, de varillas circulares.

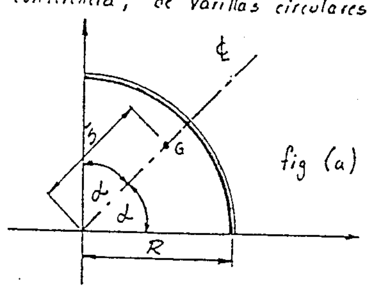


fig (a)

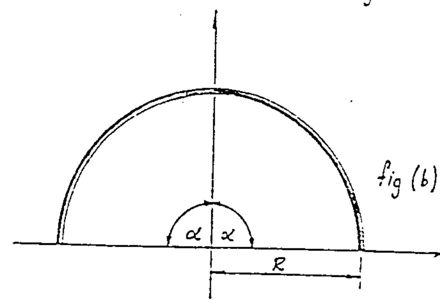
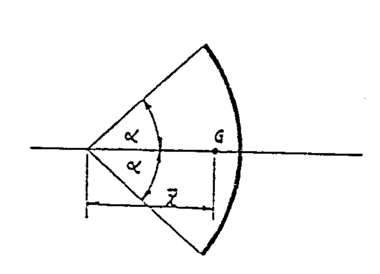


fig (b)

Las figuras (a) y (b) tienen su eje de simetría, en el primer caso está a 45°, y en el segundo caso a 90°.

Por lo tanto, según al anterior ejemplo:
Se tiene:

$$\bar{x} = \frac{R\,Sen\,\alpha}{\alpha}$$



Según la fig (a) se tiene $\bar{s} = \frac{R\,Sen\,\alpha}{\alpha}$.

Pero $\alpha = 45°$ ó $\frac{\pi}{4}$

Además $\bar{y} = \bar{x} = \bar{s} \cdot Sen\alpha$.

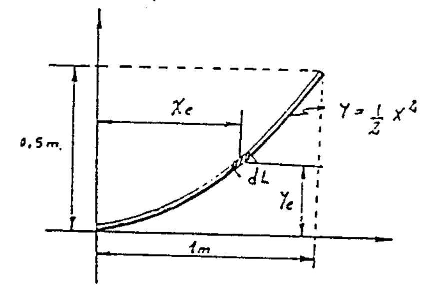
Entonces: $\bar{y} = \bar{x} = \frac{R\,Sen\alpha}{\alpha} \cdot Sen\alpha. = \frac{R\,\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}}$

Por lo tanto: $\boxed{\bar{x} = \bar{y} = \frac{2R}{\pi}}$ Para un cuarto de circunferencia.

Para la fig (b) $\bar{y} = \frac{R\,Sen\,\alpha}{\alpha}$ donde: $\alpha = 90° = \frac{\pi}{2}$.

Entonces: $\bar{y} = \frac{R\,sen\,\pi/2}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{\bar{y} = \frac{2R}{\pi}}$ Para media circunferencia.

(3.-) Determinar la distancia $\bar{y}$ del centro de gravedad de la varilla homogénea doblada en forma parabólica.



$$(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

dividiendo a ambos miembros por $(dx)^2$

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Despejando dL:

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad (1)$$

Además, si se tiene $y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x \qquad (2)$

Sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$$dL = \sqrt{1 + x^2}\, dx \Rightarrow L = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx. \quad \therefore \text{Ca.Va.} \quad x = tg\theta \Rightarrow dx = se^2\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow L = \int_0 se^3\theta\, d\theta = \frac{tg\theta\, se\theta}{2} + \frac{1}{2}\int se\theta\, d\theta \quad \text{(Integrado por partes)}$$

$$L = \frac{1}{2}\, tg\theta\, se\theta + \frac{1}{2}\ln(\sec x + tg\theta)$$

$$\Rightarrow L = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)\right]_0^1$$

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{2}\ln\sqrt{1} \Rightarrow \boxed{L = 1{,}148 \text{ m.}}$$

Por definición. $L\bar{y} = \int y\, dL$ pero $dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \sqrt{1+x^2}$

$$\Rightarrow L\bar{y} = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\sqrt{1+x^2}\, dx$$

Desarrollando: $L\bar{y} = 0{,}2101 \Rightarrow \bar{y} = \frac{0{,}2101}{1{,}148} \quad \therefore \boxed{\bar{y} = 0{,}183 \text{ m.}}$

B : LINEA CON DENSIDAD VARIABLE :

7.5.3: CENTRO DE MASA : La densidad $[\rho]$ ó masa por unidad de Volumen, se relaciona por medio del peso específico del cuerpo, medido como peso por unidad de volumen.

Entonces:

$$dW = \gamma \cdot dV.$$

Por lo tanto: $\gamma = \rho \cdot g.$ donde: g = aceleración de la gravedad.

Las ecuaciones :

$$\bar{x} = \frac{\int_L x\,dL}{\int_L dL}$$

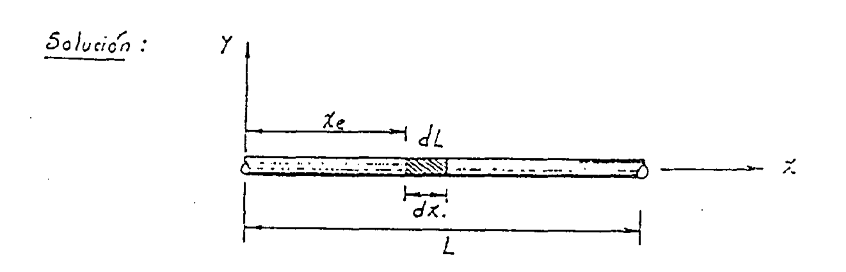
Se transforma en:

$$\bar{x} = \frac{\int_L \rho x\,dL}{\int_L \rho\,dL} \quad y \quad \bar{y} = \frac{\int_L \rho y\,dL}{\int_L \rho\,dL}.$$

Cuando ρ es variable con la longitud, área ó volumen en cualquiera de las direcciones.

Ejemplo : Encontrar el centro de gravedad de la varilla que tiene un área transversal constante, si su densidad varía de acuerdo con $\rho = Kx^2$; donde K es constante.

Solución :



Sabemos que:

$$A = Cte$$
$$dL = dx.$$
$$x_e = x.$$

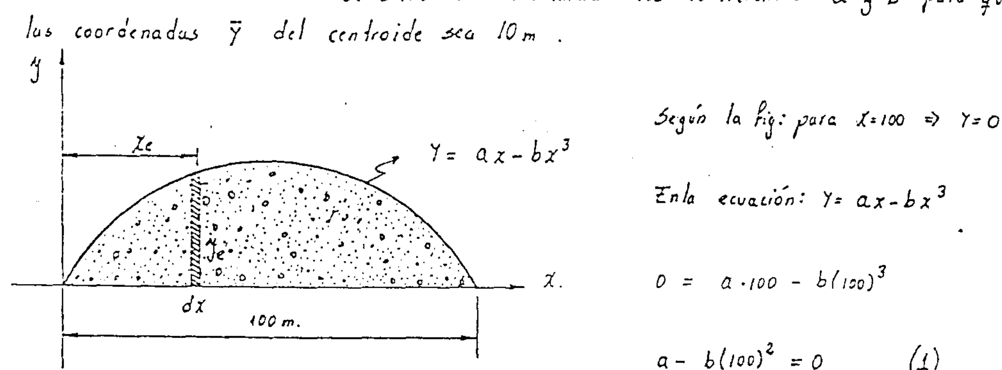
Aplicando la definición:

Se tiene: $\bar{x} = \dfrac{\int \rho \cdot x\, dL}{\int \rho \cdot dL}$ Entonces: $\bar{x} = \dfrac{\int K x^2 \cdot x\, dx}{\int K x^2\, dx}$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L K x^3\, dx}{\int_0^L K x^2\, dx} = \frac{K \int_0^L x^3\, dx}{K \int_0^L x^2\, dx} = \frac{\left(\frac{1}{4}x^4\right|_0^L}{\left(\frac{1}{3}x^3\right|_0^L} = \frac{3}{4}\frac{L^4}{L^3}$$

Por lo tanto: $\boxed{\bar{x} = \frac{3}{4} L}$

Problema de Aplicación: En la figura se muestra la sección transversal de un relleno de arena. Determinar los coeficientes "a" y "b" para que las coordenadas $\bar{y}$ del centroide sea 10 m.



Según la fig: para $x = 100 \Rightarrow Y = 0$

En la ecuación: $Y = ax - bx^3$

$$0 = a \cdot 100 - b(100)^3$$

$$a - b(100)^2 = 0 \qquad (1)$$

Si : $Y_e = \frac{1}{2}Y$; además: $dA = Y dx \Rightarrow dA = (ax - bx^3)dx$.

Por lo tanto:

$$\bar{Y} = \frac{\int Y_e\, dA}{\int dA} = \frac{\frac{1}{2}\int Y\, dA}{\int dA} = \frac{\frac{1}{2}\int Y^2 dx}{\int Y dx}$$

$$\bar{Y} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{100} (ax - bx^3)^2 dx}{\int_0^{100} (ax - bx^3)\, dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{100} (a^2x^2 - 2abx^4 + b^2x^6)\, dx}{\int_0^{100} (ax - bx^3)\, dx}$$

$$\bar{Y} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}a^2x^3 - \frac{2}{5}abx^5 + \frac{1}{7}b^2x^7\right|_0^{100}}{\left(\frac{a}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 b\right|_0^{100}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}a^2(100)^3 - \frac{2}{5}a \cdot b(100)^5 + \frac{1}{7}b^2 \cdot (100)^7\right)}{\left(\frac{1}{2}a(100)^2 - \frac{1}{4} \cdot b(100)^4\right)}$$

Pero: $\bar{y} = 10$ (según el problema).

Entonces: $$10 = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}a^2 \cdot 100 - \frac{2}{5} \cdot a \cdot b \cdot 100^3 + \frac{1}{7} b^2 \cdot 100^5\right)}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{4} b \cdot 100^2}$$

$$10\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{4} \cdot 10^4 \cdot b\right) = \frac{10}{2}\left(\frac{1}{3}a^2 \cdot 10 - \frac{2}{5} a \cdot b \cdot 10^5 + \frac{1}{7} b^2 \cdot 10^9\right)$$

Despejando "a" de (1) $\Rightarrow$ $\boxed{a = b \cdot 10^4}$

Sustituyendo "a": $$\frac{b}{2} \cdot 10^4 - \frac{b}{4} \cdot 10^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}(b \cdot 10^4)^2 \cdot 10 - \frac{2}{5}(b \cdot 10^4) b \cdot 10^5 + \frac{1}{7} b^2 \cdot 10^9\right)$$

$$\frac{b}{2} 10^4 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{b}{2} 10^4 \left(\frac{1}{3} b \cdot 10^5 - \frac{2}{5} \cdot b \cdot 10^5 + \frac{1}{7} \cdot b \cdot 10^5\right)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{8}{105} \cdot b \cdot 10^5 \Rightarrow b = \frac{105}{16} \cdot 10^{-5} \Rightarrow \boxed{b = 6{,}56 \cdot 10^{-5}}$$

Reemplazando el valor de "b" en (1); se tiene : $a = 10^4\left(\frac{105 \cdot 10^{-5}}{15}\right)$ $\boxed{a = 0{,}656}$



CENTROS DE GRAVEDAD DE LOS ELEMENTOS COMPUESTOS

8.1 GENERALIDADES: Un elemento compuesto consiste en una serie de figuras "simples" conectados, los cuales pueden ser, rectangurales, triangulares, semicirculares; pueden ser figuras planas ó lineas continuas, finalmente cuerpos conectados, etc. Tale. elementos pueden con frecuencia descomponerse en sus partes, y, siempre y cuando se conozca la figura, línea o peso.

Además del centro de gravedad de cada una de estas partes, por lo tanto se tiene el siguiente caso:

a) :

$$\bar{x} = \frac{A_1\cdot\bar{x}_1 + A_2\cdot\bar{x}_2 + \cdots\cdots A_n\cdot\bar{x}_n}{A_1 + A_2\cdots + A_i + \cdots A_n}$$

$$\bar{y} = \frac{A_1\cdot\bar{y}_1 + A_2\cdot\bar{y}_2 + \cdots\cdots + A_n\bar{y}_n}{A_1 + A_2 + \cdots A_i + \cdots A_n}$$

En forma simplificada se tiene. (Para áreas planas)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i\cdot\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i\cdot\bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

b) Para elementos delgados continuos :

$$\bar{x} = \frac{\sum L_i\cdot\bar{x}_i}{\sum L_i} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\sum L_i\cdot\bar{y}_i}{\sum L_i}$$

c): Para cuerpos : (Volúmenes).

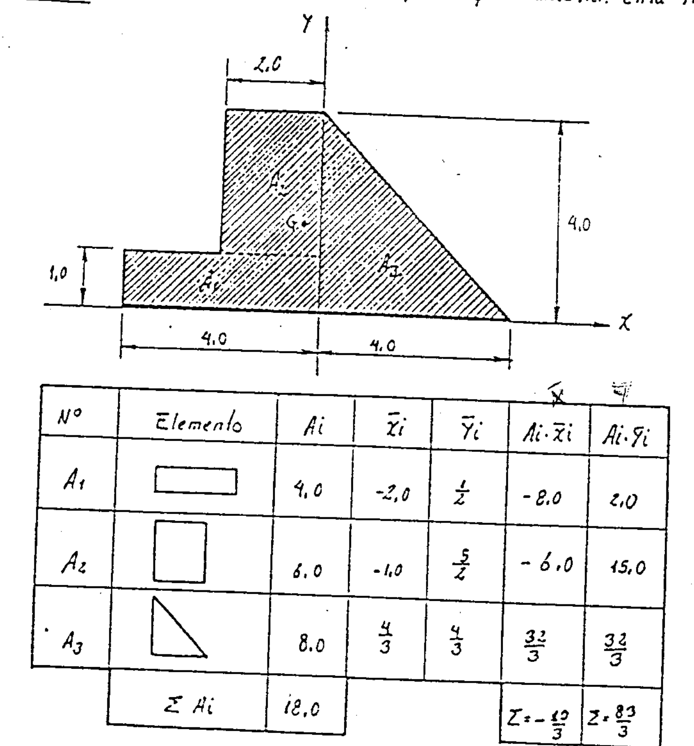
$$\bar{x} = \frac{\sum V_i \cdot \bar{x}_i}{\sum V_i} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\sum V_i \cdot \bar{y}_i}{\sum V_i} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{\sum V_i \cdot \bar{z}_i}{\sum V_i}$$

d): Cuando tienen densidad variable :

$$\bar{x} = \frac{\sum A_i \cdot \rho_i \cdot \bar{x}_i}{\sum A_i \cdot \rho_i} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\sum A_i \cdot \rho_i \cdot \bar{y}_i}{\sum A_i \cdot \rho_i}$$

etc....

__Ejemplo.__ Encontrar el centroide dela placa que se muestra. en la figura.



* Para resolver es conveniente tabular:

Nº	Elemento	A_i	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$A_i \cdot \bar{x}_i$	$A_i \cdot \bar{y}_i$
A_1	(rectángulo)	4,0	-2,0	$\frac{1}{2}$	- 8,0	2,0
A_2	(rectángulo)	6,0	-1,0	$\frac{5}{2}$	- 6,0	15,0
A_3	(triángulo)	8,0	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{32}{3}$	$\frac{32}{3}$
	$\sum A_i$	18,0			$\Sigma = -\frac{10}{3}$	$\Sigma = \frac{83}{3}$

Las cantidades $Ai \cdot \bar{x}i$ se llama momento estático de primer orden, cuyos unidades son $[u^3]$ de igual forma $Ai \cdot \bar{y}i$ con respecto a los ejes "x" y "y" respectivamente :

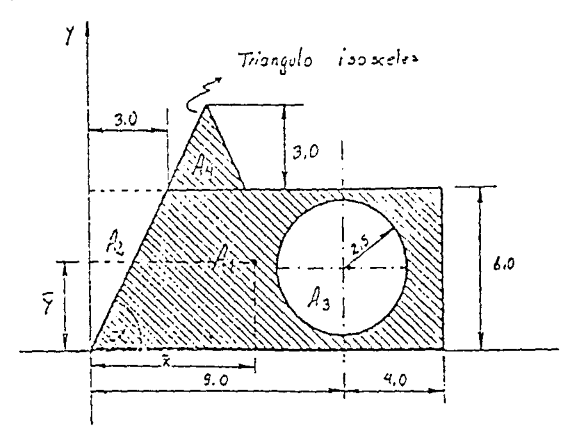
Por lo tanto:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma Ai \cdot \bar{x}i}{\Sigma Ai} = \frac{-3.333}{18.0} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = -0,185\ u.}$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma Ai \cdot \bar{y}i}{\Sigma Ai} \quad \frac{27,667.}{18,0} \Rightarrow \boxed{\bar{Y} = 1,537\ u}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

(1:) Calcular el centro de gravedad de la siguiente figura compuesta.

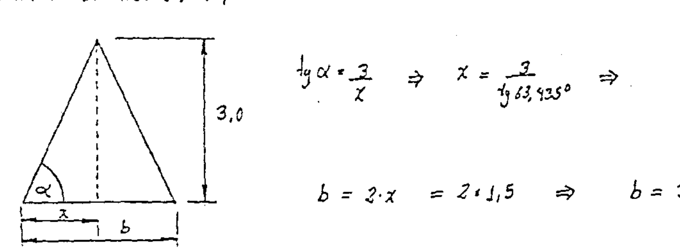


1° Se debe descomponer a figuras conocidas.

2° Calcular algunas distancias que faltan.

$\therefore \ tg\alpha = \frac{6}{3} \Rightarrow \quad \alpha = 63,435°$

Concidrando el área (4) A_4 :



$tg\,\alpha = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3}{tg\,63,435°} \Rightarrow \quad x = 1,5\ u.$

$b = 2 \cdot x = 2 \cdot 1,5 \Rightarrow \quad b = 3.$

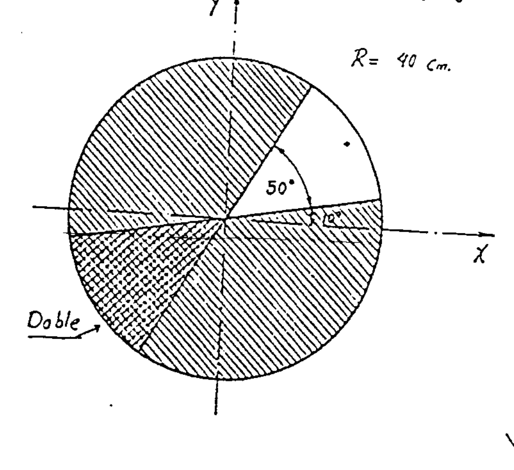
Nº	Elemento	Ai	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$Ai \cdot \bar{x}_i$	$Ai \cdot \bar{y}_i$
A_1	(rectángulo)	78.0	6,5	3	507	234
A_2	(triángulo)	-9.0	1,0	4,0	-9.0	-36
A_3	(círculo)	-19,635	9,0	3,0	-176,715	-58,905
A_4	(triángulo)	4,5	4,5	7,0	20,25	31,5
	ΣAi	53,865			341,535	170,595

Por lo tanto:

$$\bar{x} = \frac{341,535}{53,865} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = 6,34 \ u.}$$

$$\bar{Y} = \frac{170,595}{53,865} \Rightarrow \boxed{\bar{Y} = 3,17 \ u.}$$

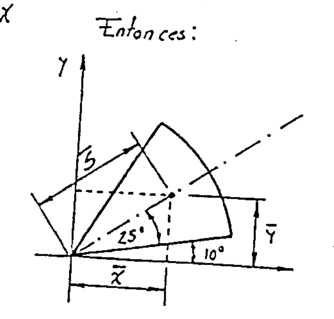
(2): Calcular el centro de gravedad de la figura circular, cortando y doblando un sector circular (Como muestra la fig sigte.).



Solución.

Se resuelven por partes, luego se suman según sus coordenadas y áreas.

Entonces:



El sector circular de la fig. es:

$$\boxed{\bar{S} = \frac{2R \operatorname{sen}\alpha}{3\alpha}.}$$

Según ejemplos anteriores α es el angulo respecto al eje de simetría.

Aquí : $\alpha = 25°$ $\Rightarrow$ si $\frac{x}{25°} = \frac{2\pi}{360°}$ $\Rightarrow$ $x = 0,1388\,\pi = \frac{5}{36}\pi$

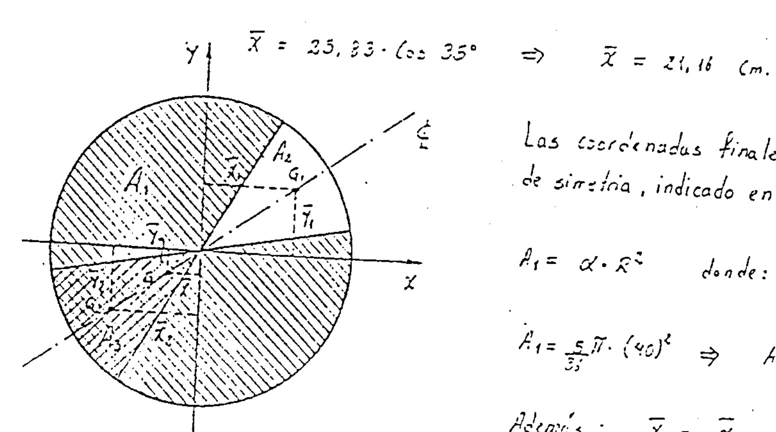
Por lo tanto :

$$\bar{S} = \frac{2 \cdot 40 \cdot \operatorname{Sen} 25°}{3 \cdot \frac{5}{36}\pi} \Rightarrow \bar{S} = 25,83 \text{ cm.}$$

Luego las coordenadas $\bar{X}$, $\bar{Y}$ serán :

$$\bar{Y} = 25,83 \cdot \operatorname{Sen} 35° \Rightarrow \bar{Y} = 14,81 \text{ Cm.}$$

$$\bar{X} = 25,83 \cdot \operatorname{Cos} 35° \Rightarrow \bar{X} = 21,16 \text{ Cm.}$$



Las coordenadas finales estarán sobre el eje de simetría, indicado en la figura.

$A_1 = \alpha \cdot R^2$ donde: $\alpha = \frac{5}{36}\pi$

$A_1 = \frac{5}{36}\pi \cdot (40)^2 \Rightarrow A_1 = 698,13 \text{ cm}^2$

Además : $\bar{X}_1 = -\bar{X}_2$ y $\bar{Y}_1 = -\bar{Y}_2$

Por lo tanto :

No	Elemento	Ai	$\bar{x}i$	$\bar{y}i$	$Ai \cdot \bar{x}i$	$Ai \cdot \bar{y}i$
A1	(círculo)	5026,55	0,0	0,0	0	0
A2	(sector)	-698,13	21,16	14,81	-14772,43	-10339,31
A3	(sector)	698,13	-21,16	-14,81	-14772,43	-10339,31
	Σ Ai	5026,55			-29544,86	-20678,62

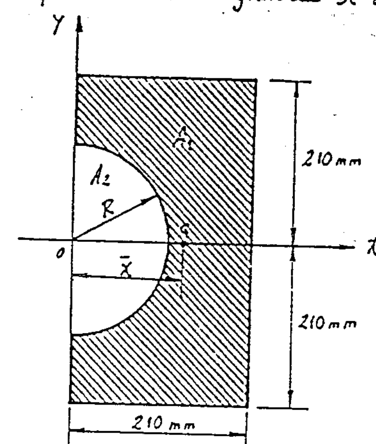
Si $\bar{X} = \frac{-29544,86}{5026,55}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\bar{X} = -5,88 \text{ cm.}}$

$\bar{Y} = \frac{-20678,62}{5026,55}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\bar{Y} = -4,11 \text{ cm}}$

3.- Determinar el radio R de la semicircunferencia que se tiene recortar para que que el centro de gravedad se encuentre a $\frac{2b}{3}$ del rectangulo.



Si $x = \frac{2b}{3}$; $y = 0$

$A_2 = \pi \cdot R^2$

$\bar{x}_2 = \frac{4R}{3\pi}$

Nº	Elemento	$A_i (cm^2)$	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$A_i \cdot \bar{x}_i$	$A_i \cdot \bar{y}_i$
A_1	(rectángulo)	882	10,5	0	9261	0,0
A_2	(semicírculo)	$-\pi \cdot R^2$	$\frac{4R}{3\pi}$	0	$-\frac{4}{3}R^3$	0,0
	ΣA_i	$882-\pi R^2$			$9261-\frac{4}{3}R^3$	0,0

Si $\bar{x} = \frac{\Sigma A_i \cdot x_i}{\Sigma A_i}$

$$\bar{x} = \frac{9261 - \frac{4}{3}R^3}{882 - \pi \cdot R^2} \qquad (1)$$

Pero: $\bar{x} = \frac{2b}{3} = \frac{2 \cdot 21}{3}$

$$\bar{x} = 14 \text{ cm.} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2) : $\Rightarrow$ $14 = \frac{9261 - \frac{4}{3}R^3}{882 - \pi R^2}$ $\Rightarrow$ $14(882 - \pi \cdot R^2) = 9261 - \frac{4}{3}R^3$

$$12348 - 14\pi \cdot R^2 - 9261 + \frac{4}{3}R^3 = 0$$

$$1,333 \cdot R^3 - 43,982 \cdot R^2 + 3087 = 0$$

Resolviendo el polinomio:

$R_1 = -7,622$ X

$R_2 = 10,265$ $\longrightarrow$ $R = 10,265$ cm.

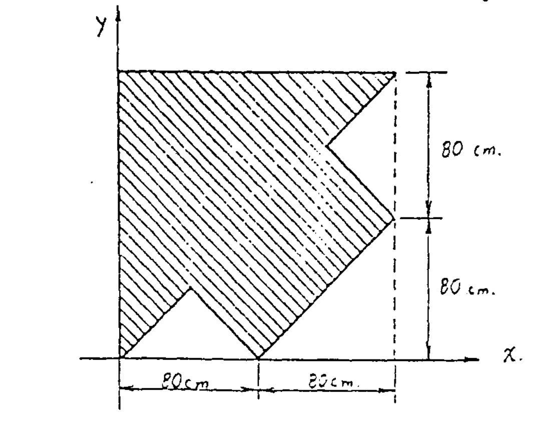
$R_3 = 29,602$ X

$$\boxed{R = 102,65 \text{ m.m.}}$$

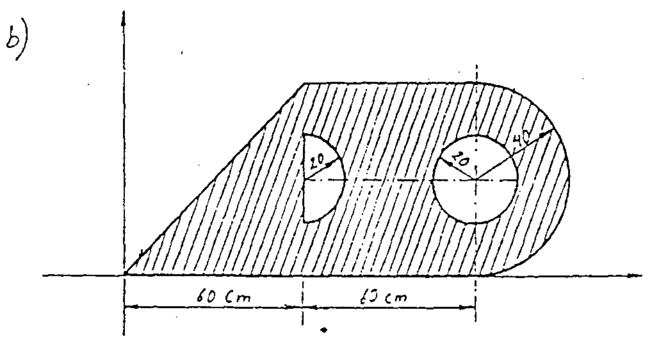
PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Encontrar el centro de gravedad de las siguientes figuras compuestas:

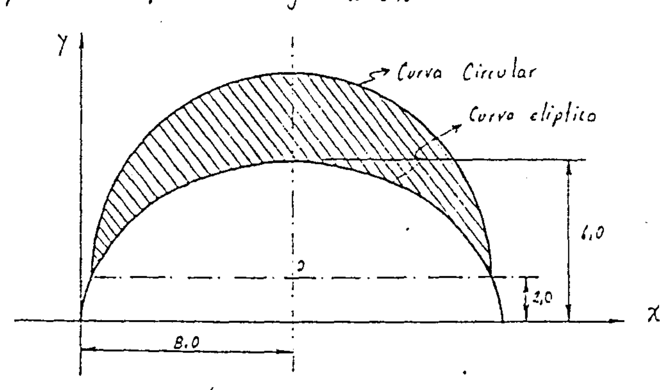
a)



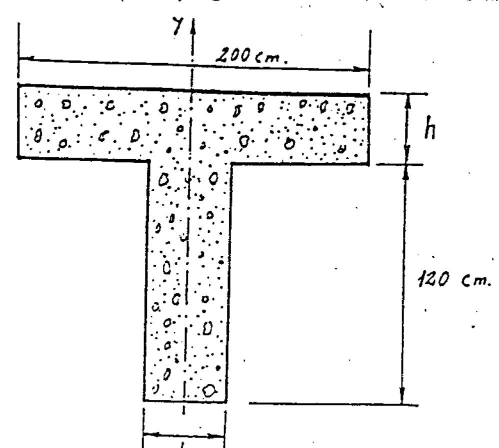
b)



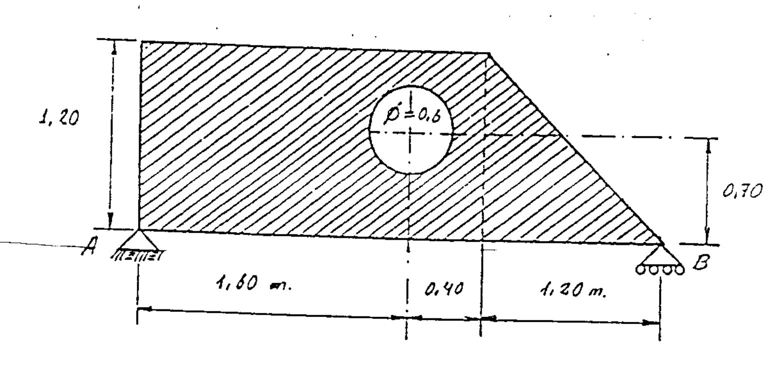
2.- Por integración encontrar las coordenadas del centro de gravedad de la figura compuesta con respecto a los ejes X e Y.



(3.-) El área de la sección transversal de la figura tiene $0{,}76\ m^2$ y la coordenada del centroide $\overline{Y} = 96{,}84\ cm$, ¿ Que valor tiene las dimenciones b y h ?

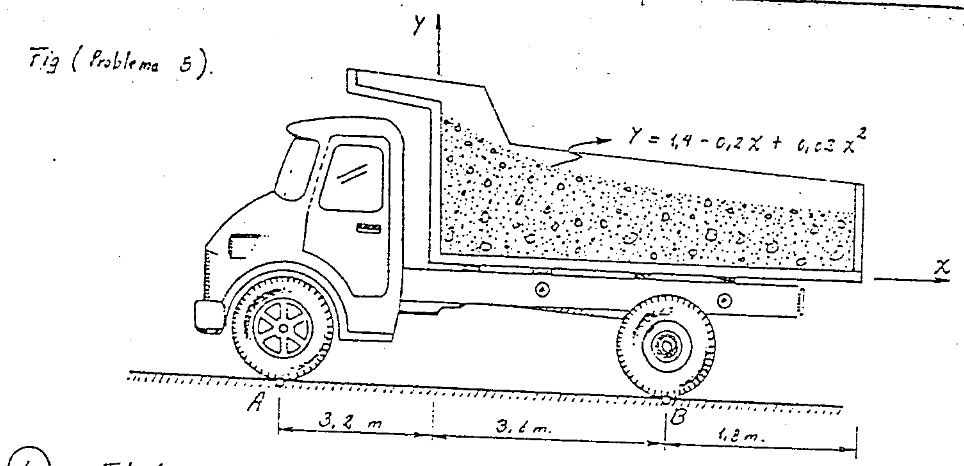


(4.-) La placa homogenea mostrada. pesa 400 Kg (masa) ; Determinar las reacciones en los apoyos A y B



(5.-) Si la volqueta esta descargado, las reacciones en las ruedas son de 12 KN en A y 8.KN en B . La carga de grava es de $2{,}2\ KN/m^3$.
Si el ancho de la tolva es de 2,6 m , y el perfil de su superficie está dada por la función mostrada .
Calcular las reacciones en A y B .
Además del volumen que transporta. la volqueta.

fig (en la sigte página).



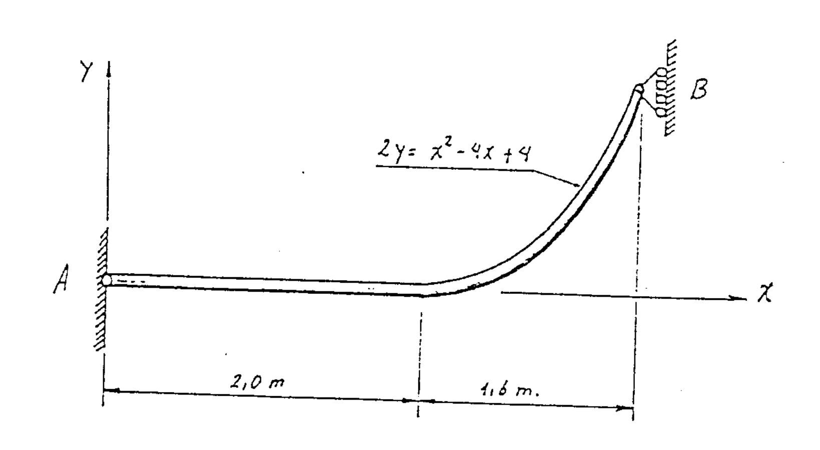
6.- El área de la placa es de 10 pie², las reacciones verticales en A y B son de 80 lb y 84 lb respectivamente, se debe taladrar un agujero de $\phi = 1$ pie. A que distancia de "A" debe hacerse el agujero para que las reacciones en A y B sean iguales?

$\phi = 1$ pie.

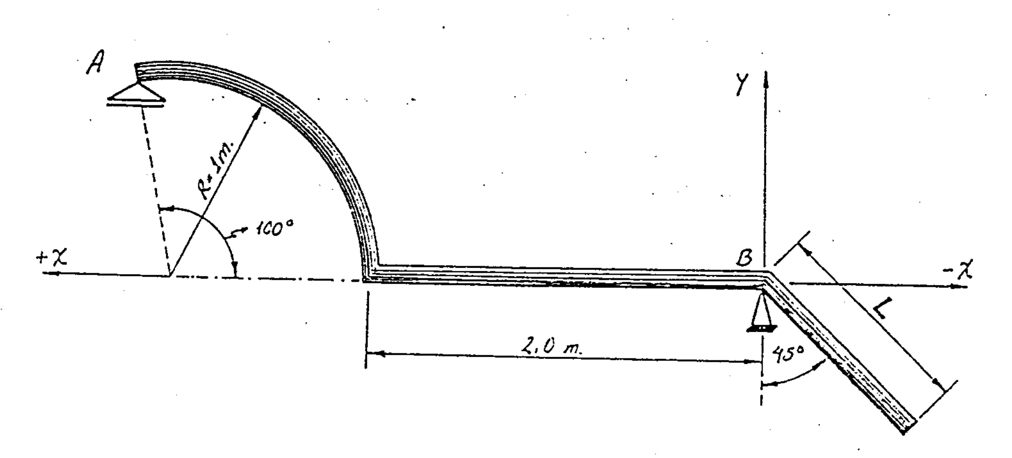
A B

x

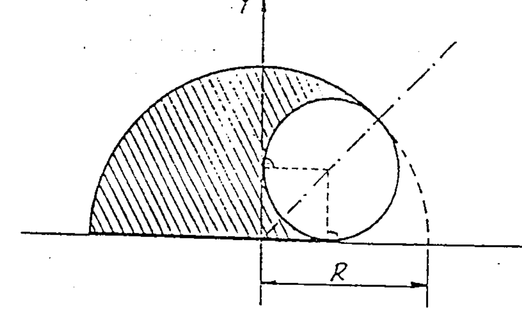
7.- Si la masa de la barra homogénea A-B es de 800 Kg (fig). Calcular las reacciones en A y B.



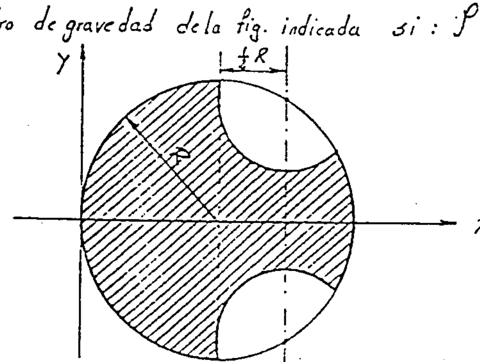
8:- La barra uniforme de sección transversal, tiene una densidad variable con $\rho = Kx^2$. Calcular la longitud "L" para que las reacciones en A y B sean iguales. Sabiendo que la masa total del mismo es de 1500 Kg.



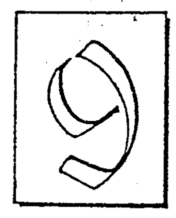
9.- Calcular el centro de gravedad de la fig. sombreada. Considerando $\rho = 1 + x$



10:- Calcular el centro de gravedad de la fig. indicada si: $\rho = \frac{y^2}{2}$; para R= 60cm

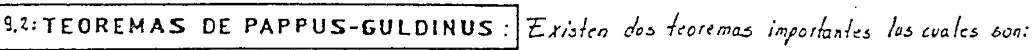


SUPERFICIES Y VOLUMENES DE REVOLUCION



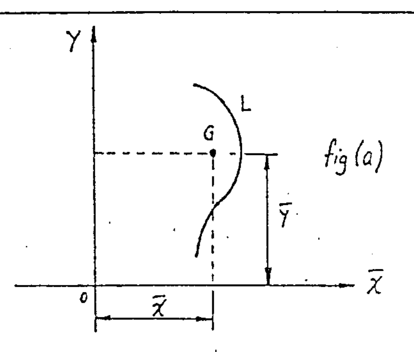
9.1: GENERALIDADES :

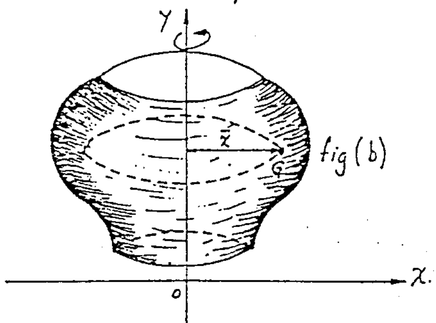
En esta sección se presentará dos teoremas importantes de gran utilidad en el campo de la ingenieria, que relacionan las superficies y volumenes de revolución con los centros de gravedad de las líneas y áreas que se generan cuando giran alrededor de una recta.



9.2: TEOREMAS DE PAPPUS-GULDINUS :

Existen dos teoremas importantes los cuales son:





Sea por ejemplo una linea "L" en el plano TXY, Cuyas coordenadas de su centro de gravedad sean $\bar{X}$, $\bar{Y}$ ($G(\bar{x},\bar{y})$). Esta linea puede generar una superficie cuando gira alrededor del eje "Y" ó "X" segun muestra la fig(b). Como la linea gira alrededor del eje "Y". su centroide se mueve en una trayectoria circular cuyo radio es $\bar{X}$.

Por lo tanto:

Primer Teorema : Este teorema establece que :

" El área dela superficie de revolución es igual al producto dela distancia que el centroide de la linea recorre por la longitud de la linea.".

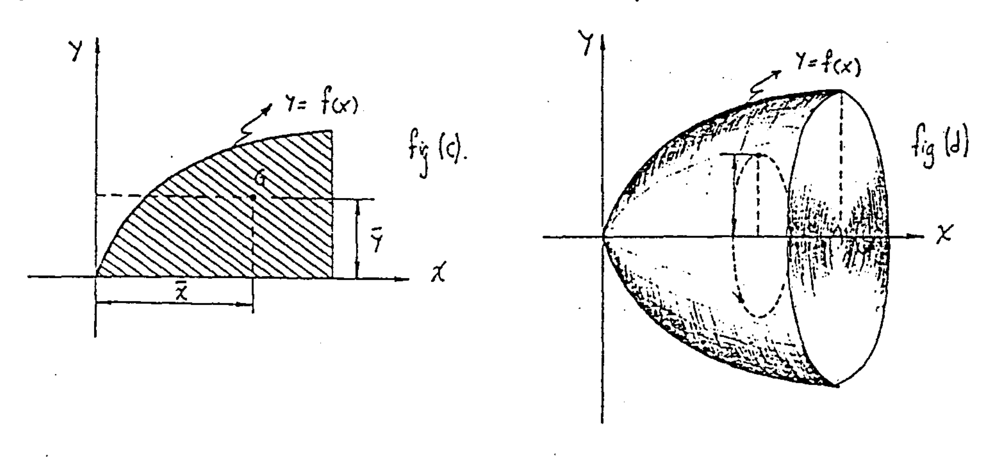
$$A = 2\pi \cdot \bar{x} \cdot L$$

donde : L = longitud de la linea.

$\bar{x}$ = Centroide de la linea.

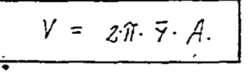
De la misma manera :

Si se tiene un área en el plano XY (según muestra la fig(c)) y ésta tiene su centro de gravedad [G] que tiene por coordenadas $\bar{x}, \bar{y}$ respectivamente. Podemos generar un volumen haciendo girar el área alrededor del eje x ó y, cuyo centro de gravedad genera un área circular de radio $\bar{x}$ ó $\bar{y}$ por 2π.



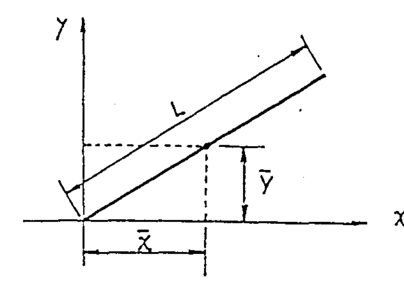
Segundo Teorema Este teorema establece que :

" La magnitud del volumen (V) de revolución generado es igual al producto de la distancia que recorre el centroide del área por la magnitud de la misma. "



$$V = 2\pi \cdot \bar{y} \cdot A.$$

Ejemplo Calcular la superficie generada por una linea que gira alrededor del eje x (Como muestra la fig).

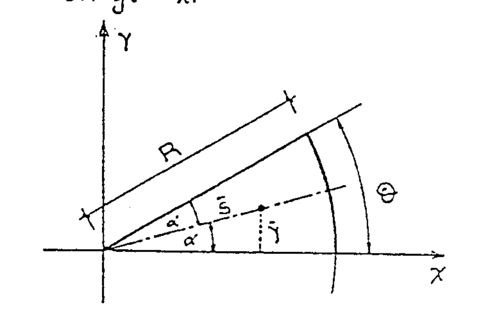


Esta recta tiene su centro de gravedad $G(\bar{x}, \bar{y})$ al girar sobre el eje x genera la superficie del cono.

$$\bar{y} = \frac{L}{2} \operatorname{sen}\alpha.$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1:- Calcular el volumen generado, al girar la figura del sector circular alrededor del eje X.



La fig del sector circular tiene por:

$$\bar{S} = \frac{2R\ sen\,\alpha}{3\pi} \quad ; \quad \pi = \alpha.$$

$$\bar{Y} = \bar{S} \cdot sen\,\alpha$$

$$\bar{Y} = \frac{2R}{3\alpha} \cdot sen^2\alpha.$$

Si: $\theta = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{2}$

Por lo tanto:

$$V = 2\pi \cdot \frac{2R}{3\alpha} \cdot sen^2\alpha \cdot A$$

donde: $A = \theta \cdot R^2$

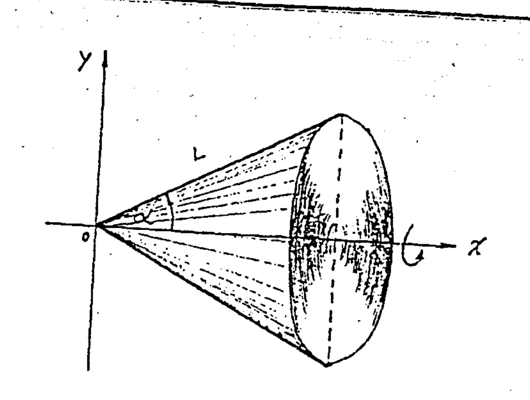
Entonces:

$$V = \frac{4\pi \cdot R \cdot sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \theta \cdot R^2}{3\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot R \cdot R^2 \cdot \theta\ sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{3\,\theta}$$

$$V = \frac{8 \cdot \pi \cdot R^3\, sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{3}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{V = \frac{8}{3}\pi \cdot R^3 \cdot sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$



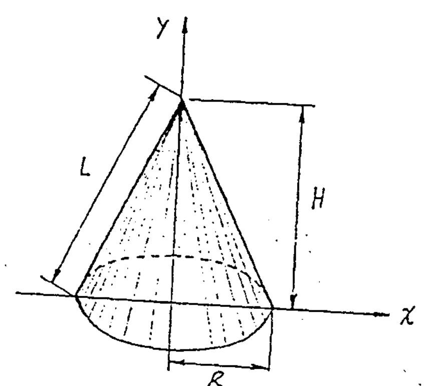
Por lo tanto:

$$A = 2\pi \cdot \frac{L}{2} \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot L$$

Entonces:

$$\boxed{A = \pi \cdot L^2 \operatorname{sen}\alpha.}$$

Pero por lo general estan dadas en función de H y R.



Por lo tanto:

$$L = \sqrt{H^2 + R^2}$$

Además: $\bar{x} = \frac{1}{2} R$

Entonces: $A = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} R \cdot \sqrt{H^2 + R^2}$

$$\boxed{A = \pi \cdot R \sqrt{H^2 + R^2}}$$

(2.-) Calcular el volumen de una esfera:

Y

$\bar{Y}$

R

X

El volumen que genera una fig semicircular será una esfera.

Entonces: $\bar{Y} = \frac{4R}{3\pi}$

Ademas: $A = \frac{\pi \cdot R^2}{2}$

Por lo tanto:

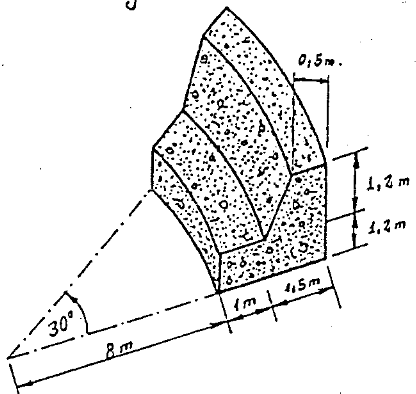
$$V = 2\pi \cdot \frac{4R}{3\pi} \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{2} = \frac{4\pi \cdot R^3}{3}$$

Entonces:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3}$$

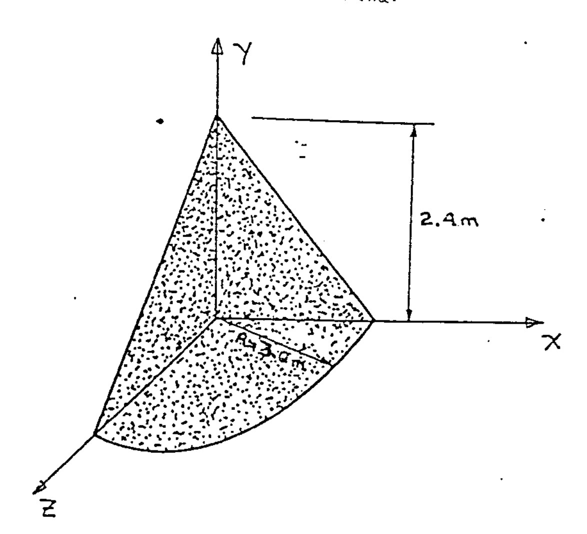
PROBLEMAS PROPUESTOS

1: Determinar el volumen del concreto que se necesita para construir un muro en curva que se indica en la fig.

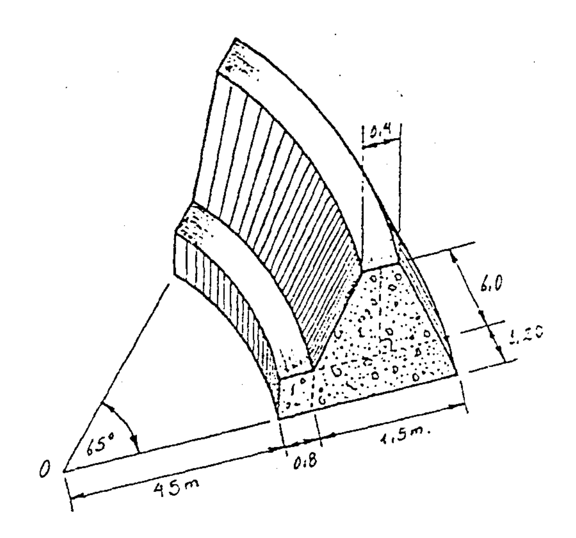


2: Determinar la superficie de la curva. No incluir el area de los extremos en la figura anterior.

3.- La arena colocada entre dos paredes según muestra la fig, tiene la forma de un cuarto de cono y que el 24% de este volumen se encuentra vacio (lleno de aire). Determinar el volumen de la arena.

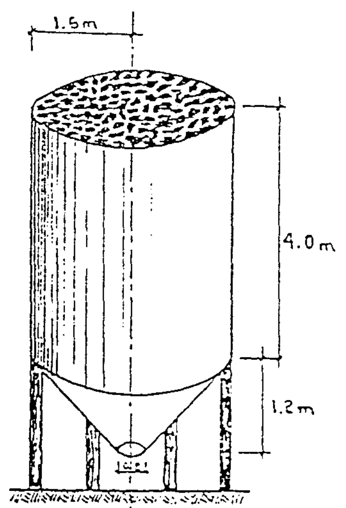


4.- Un dique circular de concreto. Determinar el peso total del dique, si el concreto tiene un peso específico de 2,4 t/m^3



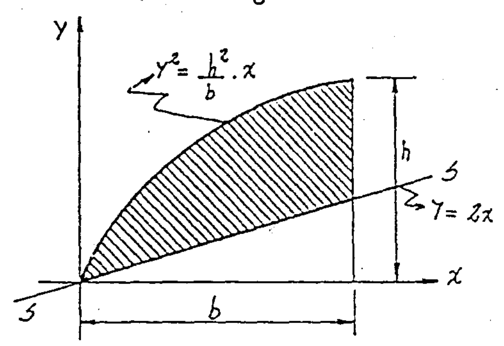
5.- El tonel está lleno completamente de carbón. Determinar el volumen total del carbón si el espacio vacío representa un 25% del volumen total.

6.- Si el espesor de la que está construido el tonel es de 10 mm. Determinar su peso cuando está vacío.
El acero tiene una densidad de $\rho = 7,85\ t/m^3$.

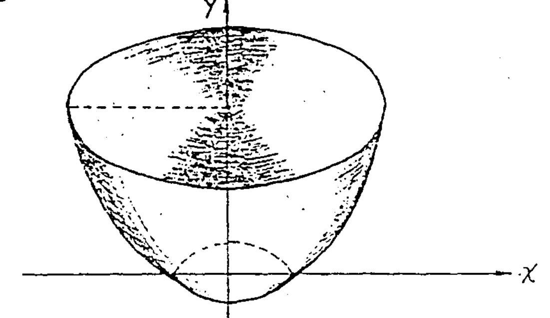


7.- Determinar el volumen generado por la curva $y^2 = \frac{h^2}{b} \cdot x$, cuando gira alrededor del eje s-s (fig. del problema 8).

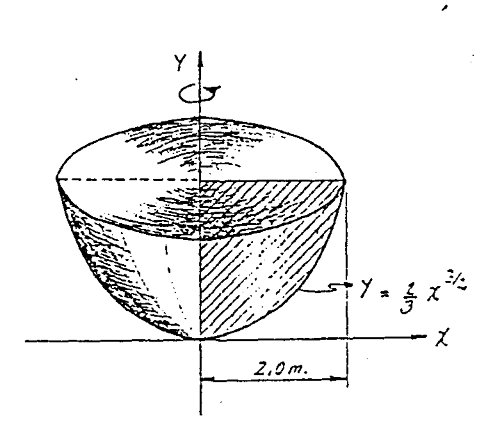
(8.-) Con relación a la fig cuya función es $Y^2 = \frac{h^2}{b} \cdot x$. Calcular la superficie de revolución, cuando gira alrededor del eje s-s



(9.-) Una tobera para el motor de un cohete se diseña girando la función: $Y = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$ alrededor del eje "y" determinar la superficie de la tobera.



(10.-) Determinar el volumen generado por la superficie; comprendido entre las curvas: cuando gira alrededor del eje "y"; como muestra la fig. siguiente.



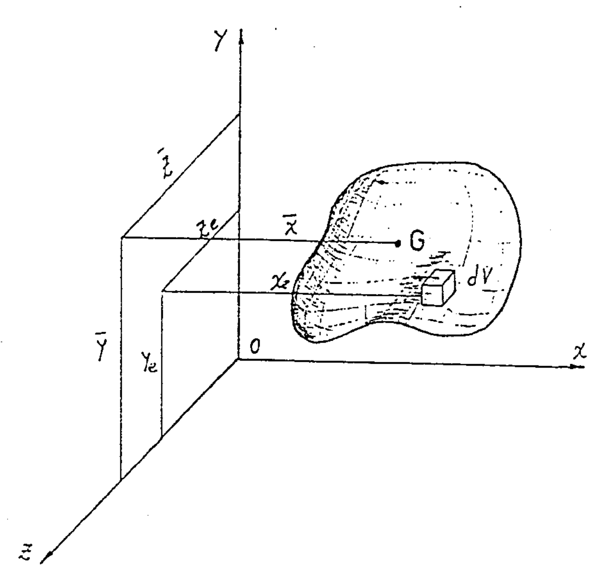
CENTROS DE GRAVEDAD DE VOLUMENES

10

10.1: DEFINICION: Si un objeto se subdivide en elementos de volumen "dV"; ver figura; la ubicación del centroide $G(x_e, y_e, z_e)$ del volumen de un objeto puede determinarse calculando los "momentos" de los elementos con respecto a los ejes coordenados. Por lo que:

$$\bar{x} = \frac{\int_V x_e \, dV}{\int_V dV} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\int_V y_e \, dV}{\int_V dV} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{\int_V z_e \, dV}{\int_V dV}$$

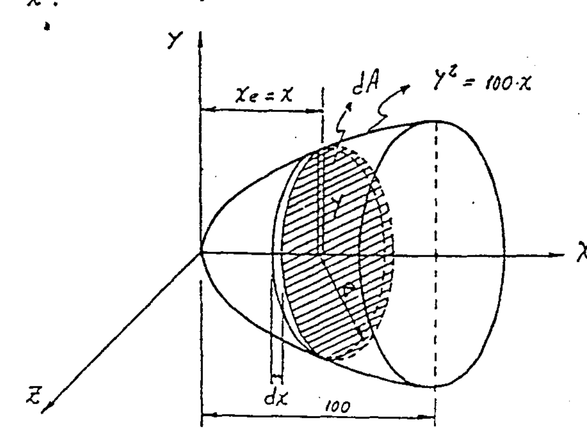
Es importante recordar, que cuando se escogen un sistema coordenado de ejes se simplifique lo más posible.



Tambien si se utiliza un sistema coordenado rectangular los términos x_e, y_e, z_e que son "brazos de palanca". De ser posible, este elemento diferencial deberá escogerse de tal forma que tenga un tamaño diferencial o ancho en una sola dirección.

Una vez que se ha hecho, solo se requerirá de una integración para cubrir totalmente la región.

Ejemplo: Encontrar el centroide ($\bar{x}$) del paraboloide de revolución, generado al girar al área sombreada (segun muestra la fig) con respecto al eje x.



Se escoge un elemento diferencial que tenga forma de un disco delgado; de un espesor dx (el elemento dA se escoge siempre perpendicular al eje de revolución.)

Por lo tanto: $dV = \pi \cdot R^2 \cdot dx$; pero: $R = Y$

$$dV = \pi \cdot y^2 \, dx \quad ; \quad \text{Además: } Y^2 = 100x.$$

Entonces: $dV = \pi \cdot 100 \cdot x \, dx.$

Aplicando la definición.

$$\bar{x} = \frac{\int x_e \, dV}{\int dV} = \frac{\int x \cdot \pi \cdot 100 \cdot x \, dx}{\int \pi \cdot 100 \cdot x \, dx.}$$

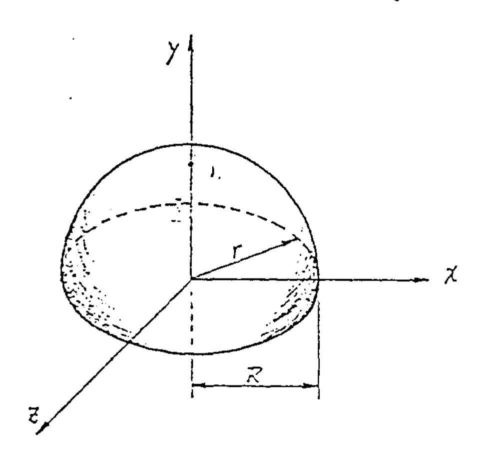
$$\bar{x} = \frac{100\pi \int_0^{100} x^2 dx.}{100\pi \int_0^{100} x \, dx.} = \frac{\int_0^{100} x^2 dx}{\int_0^{100} x \, dx.}$$

$$\bar{x} = \frac{\left(\frac{1}{3}x^3\right|_0^{100}}{\left(\frac{1}{2}x^2\right|_0^{100}} = \frac{2}{3}\frac{(100)^3}{(100)^2.} = \frac{200}{3}$$

Por lo tanto: $\boxed{\bar{x} = \frac{200}{3} = 66,67}$

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Por integracion directa, obtengase el centro de gravedad de la semiesfera dada.



Se toma un elemento diferencial "disco circular" de radio "r" y altura dy

Por lo tanto : $dV = \pi \cdot r^2 dy$

En la base : $x^2 + z^2 = R^2$ (1)

Además : $r = z = x$.

Entonces: $dV = \pi \cdot z^2 dy$ de (1) $z^2 = R^2 - x^2$

Considerando el plano $\overline{XY}$; $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow x^2 = R^2 - y^2$; Además $Y_c = Y$

Aplicando la definición:

$$\bar{Y} = \frac{\int Y_c \, dV}{\int dV} \qquad \text{donde: } dV = \pi \cdot x^2 dy = \pi (R^2 - y^2) dy$$

$$\bar{Y} = \frac{\int_0^R Y \pi (R^2 - Y^2) dY}{\int_0^R \pi (R^2 - Y^2) dY} = \frac{\pi \int_0^R (R^2 Y - Y^3) dY}{\pi \int_0^R (R^2 - Y^2) dY} = \frac{\left(\frac{1}{2} R^2 Y^2 - \frac{1}{4} Y^4 \right|_0^R}{\left(R^2 Y - \frac{1}{3} Y^3 \right|_0^R}$$

$$\bar{Y} = \frac{\frac{1}{2} R^2 R^2 - \frac{1}{4} R^4}{R^2 R - \frac{1}{3} R^3} = \frac{\frac{1}{4} R^4}{\frac{2}{3} R^3} = \frac{3}{8} R.$$

Por lo tanto: $\boxed{\bar{Y} = \frac{3}{8} R}$; Además : $\boxed{\bar{X} = 0}$; $\boxed{\bar{Z} = 0}$

2.- Ubicar el centroide "$\bar{Y}$" de la parte inferior del cono circular recto.

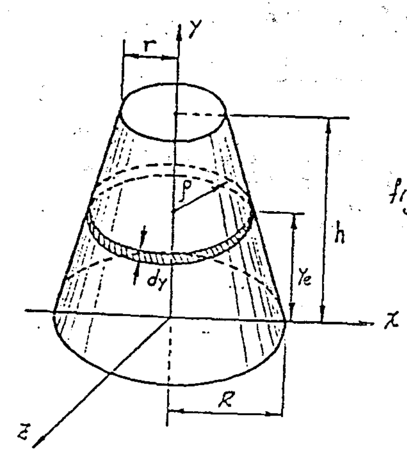


fig (*)

De la figura se tiene.

$$dV = \pi \cdot \rho^2 dy \quad \ldots\ldots (1)$$

Anillo circular donde: $\rho^2 = x^2 + z^2$

Entonces: $dV = \pi(x^2 + z^2)dy$

Pero haciendo un corte en el plano $\overline{XY}$ además considerando la mitad de este se tiene: fig(**).

fig (**)

Por semejanza de triangulos:

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE$$

Entonces: $\dfrac{h}{R-r} = \dfrac{h-Y}{\rho - r}$

$$h(\rho - r) = (R-r)(h-Y)$$

$$h\rho - hr = Rh - rh - RY + rY$$

$$\rho = \frac{Rh - Y(R-r)}{h} \Rightarrow \rho = R - \frac{Y}{h}(R-r) \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) se tiene: $dV = \pi\left[R - \frac{Y}{h}(R-r)\right]^2 dy$

de donde: $V = \pi \int_0^h \left[R - \frac{Y}{h}R + \frac{Y}{h}r\right]^2 dy = \frac{\pi}{3}\left(hR^2 + r \cdot h \cdot R + hr^2\right)$

Entonces: $\boxed{V = \frac{\pi \cdot h}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)}$

Aplicando la definición.

$$V\cdot\bar{y} = \int y_e\, dV = \int_0^h y\pi\left(R - \frac{y}{h} - \frac{y\cdot R}{h} + \frac{y\cdot r}{h}\right)^2 dy$$

Integrando: $V\bar{y} = \frac{\pi}{12}\left[h^2R^2 + 2\cdot r\cdot h^2\cdot R + 3r^2\cdot h^2\right] = \frac{\pi\cdot h^2}{12}\left(R^2 + 2\cdot rR + 3\cdot r^2\right)$

Por lo tanto: $\bar{y} = \frac{h}{4}\left(\frac{R^2 + 2R\cdot r + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}\right)$

3.- Determinar el centroide del volumen generado al girar la porción mostrada de la curva Coseno respecto al eje "X".

Figura: x_e, h, $y = h\cdot Cos\left(\frac{\pi\cdot x}{2\cdot a}\right)$, y_e, dx, a, X, Y

si: $V = 2\cdot\pi\cdot\bar{y}\cdot A.$

donde: $A = y\,dx$ además $y_e = \frac{y}{2}$

Entonces $dV = 2\cdot\pi\cdot\frac{y}{2}\cdot y\,dx.$

o sea: $dV = 2\cdot\pi\cdot y^2 dx \ldots (1)$

$y = h\cos\left(\frac{\pi\cdot x}{2\cdot a}\right) \ldots\ldots (2)$

Sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$$\int dV = \int_0^a \pi\cdot\left[Cos\left(\frac{\pi\cdot x}{2a}\right)\cdot h\right]^2 dx \Rightarrow \boxed{V = \frac{a\cdot\pi\cdot h^2}{2}}$$

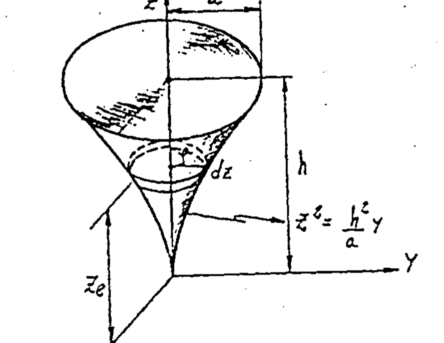
Aplicando la definición: $x_e = x$

$$V\bar{x} = \int x_e\, dV = \int_0^a x\left(\pi\cdot y^2 dx\right) = \int_0^a \pi\cdot h^2 x\, Cos^2\left(\frac{\pi\cdot x}{2\cdot a}\right) dx$$

$$V\bar{x} = \pi\cdot h^2\left[\frac{a^2h^2(\pi^2-4)}{4\pi}\right]; \text{ si: } V = \frac{a\pi h^2}{2} \Rightarrow \bar{x} = \frac{a\cdot\pi^2 - 4a}{2\cdot\pi^2}$$

Por lo tanto: $\boxed{\bar{x} = \frac{a}{2}\left[1 - \frac{4}{\pi^2}\right]}$ ok!!

(4.-) Encontrar el centroide del sólido mostrado en la fig.



Se escoge un elemento diferencial cilíndrico.

$dV = \pi \rho^2 dz$. pero $\rho = Y$

en el plano YZ

Entonces: $dV = \pi Y^2 dz$.

Si despejamos de la ecuación: $z^2 = \frac{h^2}{a} Y \Rightarrow Y = \frac{a \cdot z^2}{h^2}$ $\therefore dV = \pi \left(\frac{a z^2}{h^2}\right)^2 dz$.

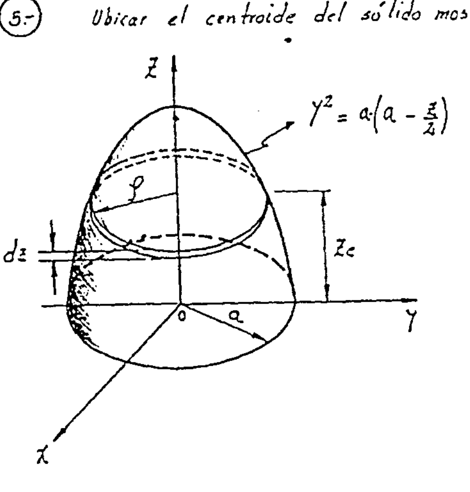
Por lo tanto: $V = \int_0^h \pi \frac{a^2}{h^4} \cdot z^4 dz. = \frac{\pi a^2}{h^4}\left(\frac{1}{5} z^5\right|_0^h = \frac{1}{5}\frac{\pi \cdot a^2}{h^4} \cdot h^5 \Rightarrow$ $\boxed{V = \frac{1}{5}\pi a^2 h.}$

Aplicando la definición: $dV = \frac{\pi}{h^4} \cdot a^2 \cdot z^4 dz$.

$$V\bar{z} = \int z\, dV = \int_0^h \frac{\pi \cdot a^2}{h^4} \cdot z^5 dz = \frac{\pi a^2}{h^4}\int_0^h z^5 dz = \frac{\pi \cdot a^2}{h^4}\left(\frac{1}{6} z^6\right|_0^h$$

$$V\bar{z} = \frac{\pi}{6}\frac{a^2}{h^4} \cdot h^6 \Rightarrow \bar{z} = \frac{\frac{1}{6}\pi \cdot a^2 h^2}{\frac{1}{5}\pi \cdot a^2 h}$$: Entonces: $\boxed{\bar{z} = \frac{5}{6} h.}$

(5.-) Ubicar el centroide del sólido mostrado en la figura.



Se escoge un elemento diferencial cilíndrico de radio ρ y a una altura ze de la base.

$\therefore \quad dV = \pi \cdot \rho^2 dz$.

Su base está dada por:

$x^2 + y^2 = a^2$ (a una altura ze →)

A una altura z se tiene: $x^2 + y^2 = \rho^2$; donde $\rho = y$ en el plano $\overline{ZY}$

Por lo tanto: $dV = \pi \cdot y^2 \, dz$ o sea: $dV = \pi a\left(a - \frac{z}{2}\right) dz$. (1)

Para hallar los límites ; si consideramos la expresión:

$$y^2 = a\left(a - \frac{z}{2}\right) \qquad si \quad y = 0$$

Entonces $a\left(a - \frac{z}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 2a$.

$$\Rightarrow \quad V = \int_0^{2a} \left(\pi a^2 - \frac{z\pi \cdot a}{2}\right) dz = \left(\pi a^2 z - \frac{1}{4}\pi \cdot a z^2\right)\Big|_0^{2a}$$

$$V = 2\pi a^3 - \pi \cdot a^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \pi \cdot a^3}$$

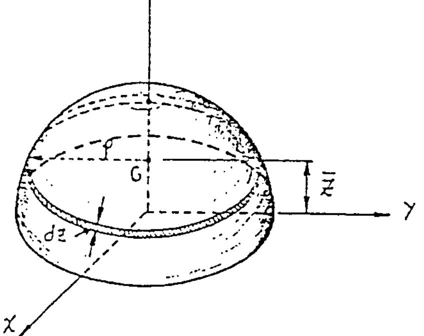
Aplicando la definición.

$$V\bar{z} = \int z \, dV = \int_0^{2a} \left(\pi a^2 z - \frac{1}{2}\pi a z^2\right) dz = \left(\frac{1}{2}\pi a^2 z^2 - \frac{1}{6}\pi a z^3\right)\Big|_0^{2a}$$

$$V\bar{z} = 2\pi a^2 a^2 - \frac{8}{6}\pi \cdot a a^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot a^4$$

Por lo tanto: $\bar{z} = \dfrac{\frac{2}{3}\pi \cdot a^4}{\pi \cdot a^3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{z} = \frac{2}{3}a}$

(6.-) El hemisferio de radio R, está hecho con una serie de placas muy delgadas apiladas de tal forma que la densidad varía en relación con la altura $\rho = Kz$, donde $K = Cte$. Determinar la masa y la distancia $\bar{z}$ de la semiesfera.



Se escoge un elemento diferencial de espesor dz

Por lo tanto: $dV = \pi \cdot \rho^2 dz.$

haciendo un corte en el plano YZ; se tiene:

Si $\rho = Y$; Además $Y^2 + Z^2 = R^2$

donde: $Y^2 = R^2 - Z^2$

Por lo tanto: $dV = \pi (R^2 - Z^2) dz$ (1)

$$\Rightarrow \quad V = \int_0^R \pi (R^2 - z^2) dz = \pi \left(R^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right|_0^R$$

$$\boxed{V = \frac{2}{3} \pi \cdot R^3}$$ Volumen de la semiesfera.

Aplicando la definición: $(\rho = Kz)$

$$\bar{z} = \frac{\int \rho \cdot z\, dV}{\int \rho\, dV} = \frac{\int_0^R Kz^2 \cdot \pi (R^2 - z^2) dz}{\int_0^R Kz \cdot \pi (R^2 - z^2) dz} = \frac{\pi K \int_0^R (R^2 z^2 - z^4) dz}{\pi K \int_0^R (R^2 z - z^3) dz}.$$

$$\bar{z} = \frac{\left(\frac{1}{3} R^2 z^3 - \frac{1}{5} z^5 \right|_0^R}{\left(\frac{1}{2} R^2 z^2 - \frac{1}{4} z^4 \right|_0^R} = \frac{\frac{1}{3} R^5 - \frac{1}{5} R^5}{\frac{1}{2} R^4 - \frac{1}{4} R^4} = \frac{\frac{2}{15} R^5}{\frac{1}{4} R^4}$$

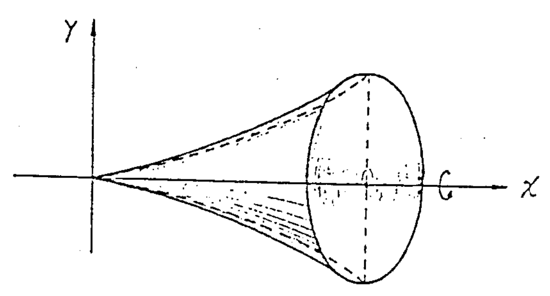
Por lo tanto: $\boxed{\bar{Z} = \frac{8}{15} R.}$

Por simetría:

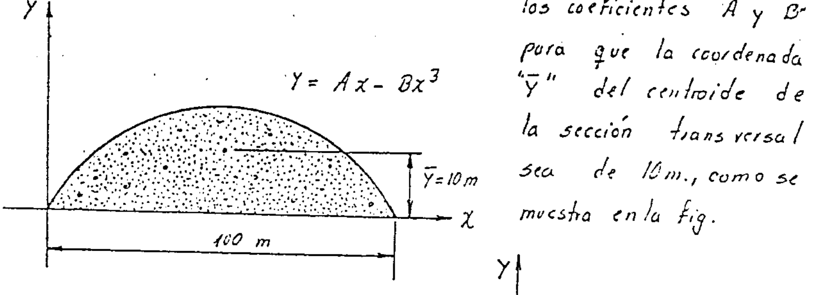
$\boxed{\bar{Y} = 0}$; $\boxed{\bar{X} = 0}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

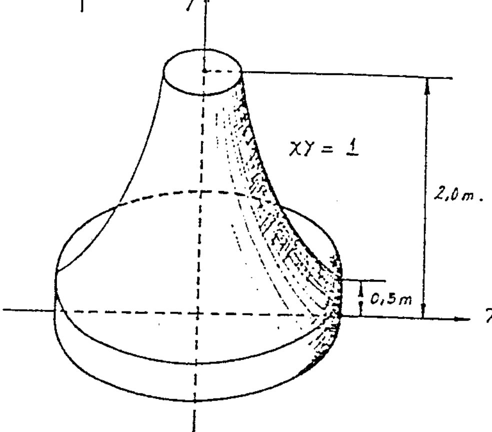
1.- Girando la curva $Y = \frac{1}{4}X^2$, alrededor del eje X un volumen de revolución de $10\ m^3$, Determinar su centroide.



2.- Se muestra la sección transversal de un relleno de arena. Determinar los coeficientes A y B para que la coordenada "$\bar{Y}$" del centroide de la sección transversal sea de 10 m., como se muestra en la fig.



3.- Por integración, determínese el área y la distancia centroidal $\bar{X}$ del área sombreada; Luego utilizando esos resultados determinar el volumen de este sólido si gira alrededor del eje Y, como se muestra en la figura.

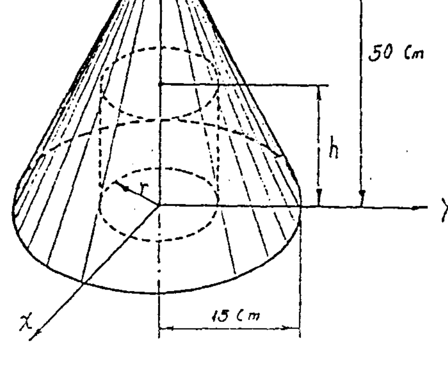


4.- Determinar la ubicación $\bar{z}$ del centroide de la figura consistente en un cono y un hemisferio que esta sobre el cono, tal como muestra la fig.

2,4 cm

12,0 cm.

5.- Determinar la distancia $\bar{z}$ del centroide de la fig, que consiste en un cono de. $H = 50$ cm perforado en su base de forma cilíndrica que tiene las dimenciones de radio $r = 5$ cm. y altura $h = 20$ cm.



6.- El cilindro circular, está hecho de (Al) con densidad de 2700 Kg/m^3 y (Fe) con densidad de 7800 Kg/m^3

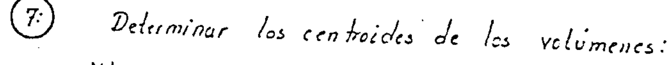
a): Determinar el centroide del volumen del cilindro.

b): Determine el centro de masa del cilindro.

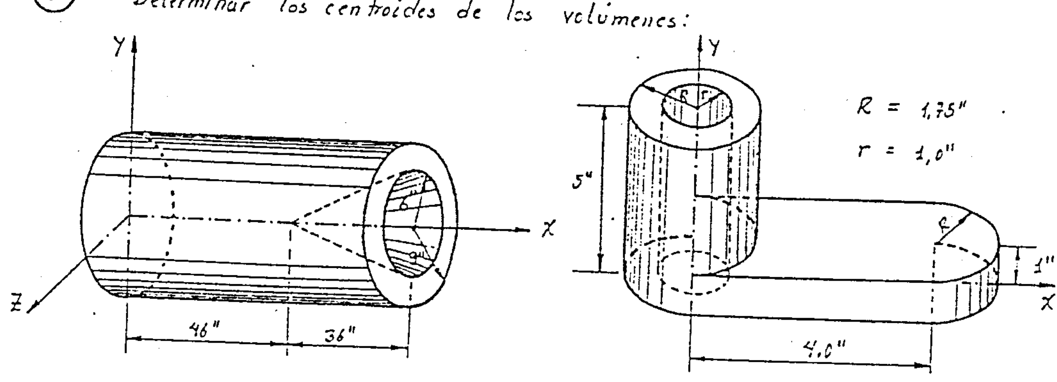
r = 100 mm.

AL Fe

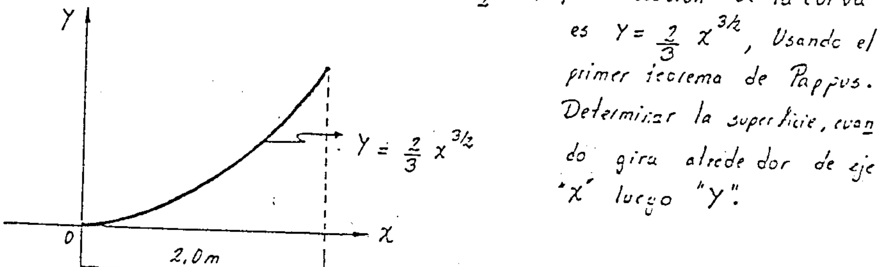
600 mm. 600 mm.

7:- 

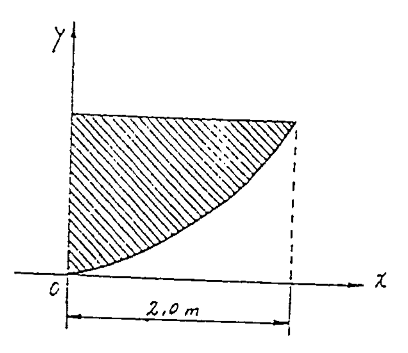
Determinar los centroides de los volúmenes:



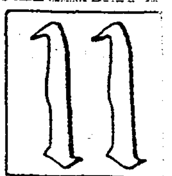
8:- Si la densidad de la linea varia con $\rho = \frac{1}{2}x^2$, y la ecuación de la curva es $Y = \frac{2}{3}x^{3/2}$, Usando el primer teorema de Pappus. Determinar la superficie, cuando gira alrededor de eje "X" luego "Y".



9:- Con referencia a los mismos datos del problema anterior. Calular el volumen de la área en revolución., donde ρ varia de igual manera con $\frac{1}{2}x^2$.



MOMENTOS DE INERCIA



11.1: GENERALIDADES.- En el análisis de problemas de ingeniería aparecen con frecuencia las cantidades llamadas "Momentos de Inercia", tambien conocidas como momentos de segundo orden. Así por ejemplo, los momentos de inercia de áreas se utilizan en el estudio de fuerzas distribuidas y en el calculo de deflexiones en las vigas. El momento ejercido por la presión sobre una placa sumergida, se puede expresar en términos del momento de inercia del área de la placa. Para estudiar estas aplicaciones, los momentos de inercia deben ser parte de nuestro estudio, por lo tanto, en este capítulo se desarrollará un método para determinar el momento de inercia tanto de un área como de un cuerpo que tenga masa específica.

El momento de inercia de un área es una propiedad importante en la ingeniería, puesto que ésta debe determinarse o especificarse si uno va a analizar ó diseñar un miembro de una estructura. Por otro lado se debe conocer el momento de inercia de masa del cuerpo si se estudia el movimiento del mismo.

11.2: DEFINICION.- En capítulos anteriores se definió que el centroide de un área, se encontró considerando el "Primer Momento de un área" respecto a un eje; esto es, para calcular se tuvo que evaluar una integral de la forma: $\int x\,dA$, por lo que los momentos de inercia se define como:

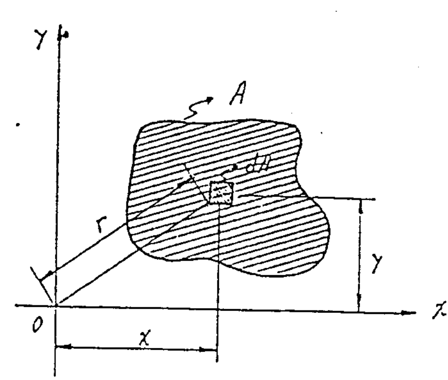
$$\int x^2 dA.$$

Entonces: el "Momento de Inercia respecto al eje Y (I_Y) es el producto del área por su distancia al cuadrado", así:

$$I_Y = \int x^2 dA.$$

Por lo tanto según las consideraciones anteriores se tiene:

Si se considera por ejemplo un área (A) según muestra la figura, dentro el área comprendido se toma un elemento diferencial dA. éste tiene por coordenadas x, y. Por definición este elemento dA. tiene sus momentos de inercia, como sigue.



$$dI_x = y^2 dA.$$

$$dI_y = x^2 dA.$$

respectivamente: por lo tanto para el área completa será :

$$\boxed{I_x = \int y^2 dA.} \quad ; \quad \boxed{I_y = \int x^2 dA.}$$

Tambien se puede definir respecto a un eje que pasa por "0" que es perpendicular a los ejes x e y, por lo tanto : Segun la fig. se tiene :

$$I_o = \int r^2 dA \quad ; \quad \text{pero} \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad (\text{Teorema de Pitágoras})$$

Entonces: $I_o = \int (x^2 + y^2) dA.$

$$I_o = \int x^2 dA + \int y^2 dA. \quad (\text{Momentos de inercia resperto de } x \text{ e } y)$$

Por lo tanto:

$$\boxed{I_o = I_x + I_y}$$

Llamado momento polar de inercia.

11.3: PRODUCTO DE INERCIA:- En algunas aplicaciones de diseño estructural ó mecánico, es necesario saber la orientación de aquellos ejes que proporcionan los momentos máximos y mínimos del área.

Por lo que, el producto de inercia de un elemento de área (dA) localizado en el punto (X, Y), según la figura anterior, se define como:

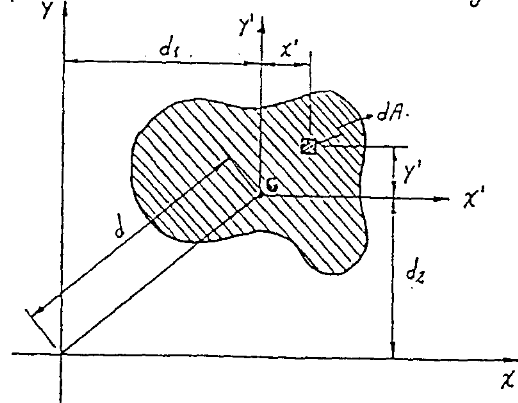
$$dI_{xy} = x \cdot y \cdot dA.$$

Para el área total se tiene:

$$I_{xy} = \int x \cdot y \, dA.$$

Llamado producto de inercia.

11.4:- TEOREMA DE STEINER: Conocida tambien como teorema de ejes paralelos; en algunos casos se conocen los momentos de inercia de un área respecto a un sistema de ejes particulares, pero a veces se requieren sus valores con respecto a otros ejes; si los ejes son paralelos se pueden obtener los momentos de inercia aplicando el teorema de Steiner.



Segun la fig. los ejes X', Y' ejes rectangulares que pasan por su centroide G; d_1 y d_2 son distancias fijas entre los Y'-Y y X'-X.

Aplicando la definición del elemento diferencial dA con respecto al eje X se tiene:

$$dI_x = (Y' + d_2)^2 \, dA \qquad \text{Integrando : m/m.}$$

De lo anterior se tiene:

$$I_x = \int (Y' + d_2)^2 dA$$

Desarrollando: $I_x = \int (Y'^2 + 2Y'd_2 + d_2^2)\, dA = \int Y'^2 dA + 2d_2 \int Y' dA + \int d_2^2 dA.$

La expresión: $\int Y'^2 dA = \bar{I}_x$ donde: $d_2^2 \int dA = d_2^2 A.$

Además: $2 d_2 \int Y' dA = 0$ Porque el eje α' pasa por el centroide del área por lo tanto $Y' = 0$

En resumen: $\boxed{I_x = \bar{I}_x + d_2^2 A}$

De forma similar: $\boxed{I_Y = \bar{I}_Y + d_1^2 \cdot A}$

El teorema de Steiner dice:

" El momento de inercia respecto a otro eje paralelo a los que pasan por su centro de gravedad de un área es igual al momento de inercia que pasa por su centroide más el producto de la distancia al cuadrado por su área ".

En forma similar será: $\boxed{I_o = \bar{I}_o + d^2 \cdot A.}$

$\boxed{I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_1 \cdot d_2 \cdot A.}$

11.5: RADIO DE GIRO.- Para el cálculo de estructuras, especialmente en el diseño de columnas, se utiliza con frecuencia esta característica geométrica, que se llama "Radio de giro" cuya unidad fundamental es "unidades de longitud" Cm, m, plg, pie, etc.

Estan expresadas en función de los momentos de inercia y áreas; por lo que són:

Lo dicho anteriormente:

$$K_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad ; \quad K_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad ; \quad K_o = \sqrt{\frac{I_o}{A}}$$

Que son radios de giro respecto a los ejes x, y, etc.

Además estas expresiones son fáciles de recordar dado que són similares a la que se utiliza para determinar el momento de inercia de un área respecto a un eje

Por ejemplo: $I_x = K_x^3 \cdot A$. (1)

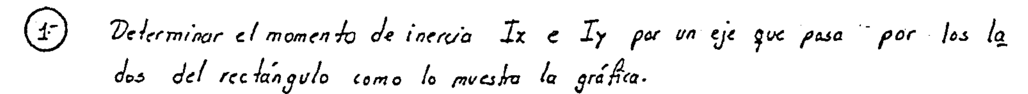
Mientras que para un elemento diferencial $dI_x = y^2 \cdot dA$. (2)

Donde (1) y (2) son similares:

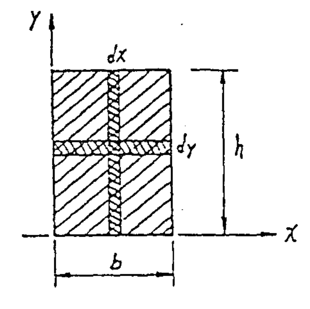
de ahí que de (1) $\Rightarrow$ $K_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$

PROBLEMAS RESUELTOS

MOMENTOS DE INERCIA



(1) Determinar el momento de inercia I_x e I_y por un eje que pasa por los lados del rectángulo como lo muestra la gráfica.



1° Se escoge un elemento diferencial.

2° Se aplica la definición.

$$I_x = \int y^2\, dA. \qquad \text{donde: } dA = b\,dy$$

$$\Rightarrow I_x = \int_0^h y^2 \cdot b\, dy = \left(\frac{1}{3} b\, y^3\right|_0^h$$

Entonces: $\boxed{I_x = \frac{b \cdot h^3}{3}}$ (el elemento diferencial que se escogio es horizontal).

Por lo tanto para I_y escogemos un elemento diferencial vertical:

$$I_y = \int x^2 dA \qquad \text{donde: } dA = h \cdot dx.$$

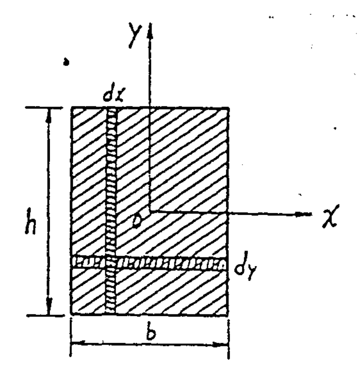
Entonces: $I_y = \int_0^b x^2 \cdot h\, dx = \left(\frac{1}{3} h \cdot x^3\right|_0^b = \frac{1}{3} h \cdot b^3 - 0$

Por lo tanto: $\boxed{I_y = \frac{h \cdot b^3}{3}}$

Se puede notar que las unidades son $[\mu^4]$ p' ejemplo : cm^4, m^4, plg^4, etc.; o sea unidades a la cuarta potencia.

Sin embargo puede existir momentos de inercia con respecto a otros ejes (ejm. un eje que pasa por su centroide, con el ejemplo siguiente lo demostraremos.

2.- Calcular el momento de inercia con respecto a los ejes que pasan por su centro de gravedad ($\bar{I}_x$, $\bar{I}_y$).



$$\bar{I}_x = \int Y^2 dA. \quad \text{donde: } dA = b \cdot dy$$

$$\bar{I}_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y^2 \cdot b\,dy = \left(\frac{1}{3} b \cdot Y^3 \right|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$\bar{I}_x = \frac{b}{3}\left(\frac{h^3}{8} - \left(-\frac{h}{8}\right)^3\right) = \frac{b}{3}\left(\frac{2h^3}{8}\right)$$

Entonces: $\boxed{\bar{I}_x = \frac{1}{12} b \cdot h^3}$

De la misma forma: $\bar{I}_y = \int x^2 dA$ pero: $dA = h \cdot dx.$

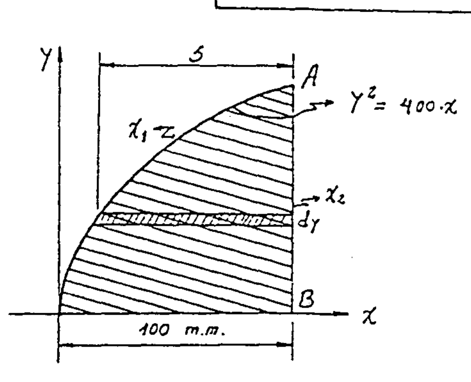
$$\bar{I}_y = \int_{-\frac{b}{2}} x^2\, h\,dx. = \frac{h}{3}\left(x^3\right|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{h}{3}\left[\left(\frac{b}{2}\right)^3 - \left(-\frac{b}{2}\right)^3\right]$$

Entonces. $\bar{I}_y = \frac{h}{3}\left(\frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8}\right) \Rightarrow \boxed{\bar{I}_y = \frac{b^3 h}{12.}}$

Si deseamos encontrar el momento polar de inercia o sea por un eje perpendicular que pasa por O se tiene:

$$I_o = \bar{I}_x + \bar{I}_y = \frac{b \cdot h^3}{12} + \frac{h \cdot b^3}{12} \Rightarrow \boxed{I_o = \frac{b \cdot h}{12}\left(b^2 + h^2\right)}$$

3.- Determinar el momento de inercia. del área sombreado con respecto al eje $\bar{x}$



La recta A-B tiene por ecuación: $x = 100$ o sea $x_1 = 100$

despejando x de $y^2 = 400x \Rightarrow x_2 = \frac{y^2}{400}$

Si $dA = s\,dy$ pero: $s = x_1 - x_2$ o sea: $s = 100 - \frac{y^2}{400}$

Entonces: $dA = \left(100 - \frac{y^2}{400}\right) dy.$

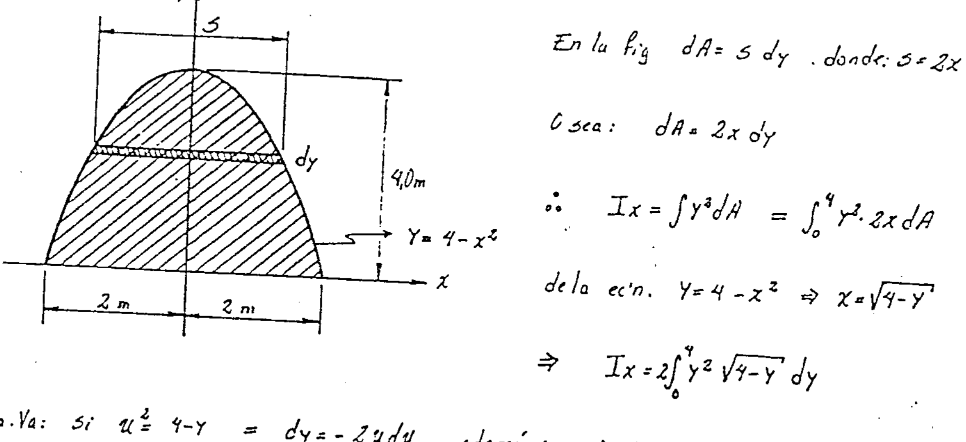
Aplicando la definición: (si: $x = 100 \Rightarrow y = 200$)

$$I_x = \int y^2\,dA = \int_0^{200} y^2\left(100 - \frac{y^2}{400}\right) dy = 100\int_0^{200} y^2 dy - \frac{1}{400}\int_0^{200} y^4 dy$$

$$I_x = \left(\frac{100}{3}y^3 - \frac{1}{5\cdot 400}y^5\right)\Big|_0^{200} = \frac{8\cdot 10^8}{3} - \frac{8\cdot 10^8}{5} = \frac{16}{15}\cdot 10^8\ (mm)^4$$

Por lo tanto: $I_x = 1{,}067 \times 10^8\ (mm)^4$

(4) Determinar el momento de inercia I_x del área sombreada como se muestra en la fig. sigte.



En la fig $dA = s\,dy$. donde: $s = 2x$

O sea: $dA = 2x\,dy$

$\therefore \quad I_x = \int y^2 dA = \int_0^4 y^2 \cdot 2x\,dA$

de la ec'n. $y = 4 - x^2 \Rightarrow x = \sqrt{4-y}$

$$\Rightarrow \quad I_x = 2\int_0^4 y^2\sqrt{4-y}\,dy$$

Ca.Va: si $u^2 = 4 - y$ = $dy = -2u\,du$. además: si $y = 0 \Rightarrow u = 2$; $y = 4 \Rightarrow u = 0$

Entonces: $I_x = 2\int_2^0 (4-u^2)^2 \cdot u \cdot (-2u \cdot du)$

Desarrollando:

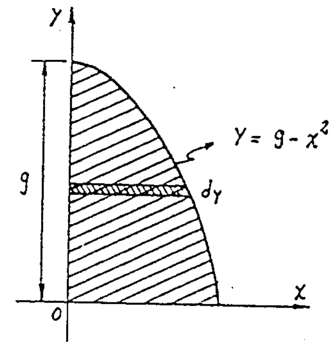
$$I_x = -4\int_2^0 u^2(4-u^2)^2\,du = -4\int_2^0 u^2(16-8u^2+u^4)\,du$$

$$I_x = -4\int_2^0 (16u^2-8u^4+u^6)\,du = -4\left(\frac{16}{3}u^3-\frac{8}{5}u^5+\frac{1}{7}u^7\right|_2^0$$

$$I_x = -4\left[-\left(\frac{16}{3}\cdot 2^3-\frac{8}{5}\cdot 2^5+\frac{1}{7}2^7\right)\right] = \frac{4096}{105}$$

Por lo tanto: $\boxed{I_x = 39\ (m^4)}$

(5.-) Determinar el momento de inercia I_x.



Si: $dA = x\,dy$

De la ec'n fundamental: $I_x = \int y^2 dA$.

$\Rightarrow \quad I_x = \int y^2\cdot x\,dy$; pero: $x = \sqrt{9-y}$

$$I_x = \int_0^9 y^2\sqrt{9-y}\,dy$$

Ca. Va. $h^2 = 9-y \Rightarrow y = 9-h^2$

$dy = -2h\,dh$.

Además cambian los límites:

Si: $y=0 \Rightarrow h=3$ (Para límite inferior)

Si: $y=9 \Rightarrow h=0$ (Para límite superior)

Entonces:

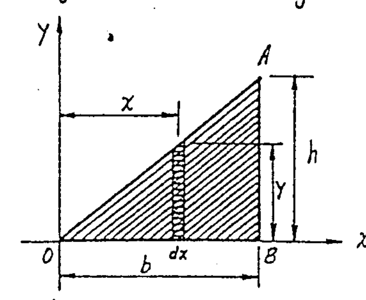
$$I_x = \int_3^0 (9-h^2)^2 h(-2h\,dh) = -2\int_3^0 h^2(81-18h^2+h^4)\,dh.$$

$$I_x = \int_3^0 -2(81h^2-18h^4+h^6)\,dh = -2\left(\frac{81}{3}h^3-\frac{18}{5}h^5+\frac{1}{7}h^7\right|_3^0$$

$$I_x = -2\left[-\left(\frac{81}{3}\cdot 3^3-\frac{18}{5}\cdot 3^5+\frac{1}{7}\cdot 3^7\right)\right] = \frac{11664}{35}$$

Por lo tanto: $\boxed{I_x = 333{,}26\ u^4}$

6.- Calcular los momentos de inercia con respecto a los ejes X e Y. del triangulo mostrado en la fig.



Si: $dA = y\,dx$.

En el Δ OAB se tiene: $\dfrac{h}{b} = \dfrac{y}{x}$.

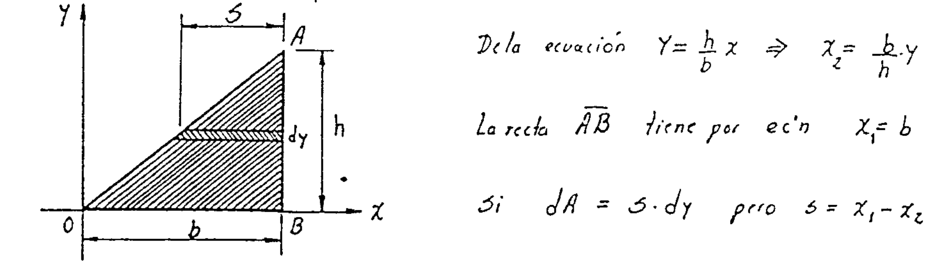
$\Rightarrow \quad y = \dfrac{h}{b}x$ (ec'n de la recta $\overline{OA}$)

Por definición: $I_Y = \int x^2 dA = \int_0^b x^2 \cdot y\,dx$. pero: $y = \dfrac{h}{b}x$.

Entonces: $I_Y = \int_0^b \dfrac{h}{b} x^3 dx = \dfrac{h}{b}\left(\dfrac{1}{4}x^4\right|_0^b = \dfrac{1}{4}\dfrac{h}{b}\cdot b^4$

Por lo tanto: $\boxed{I_Y = \dfrac{h \cdot b^3}{4}}$

Para calcular el momento de inercia con respecto al eje X se considerará, lo sigte:



De la ecuación $Y = \dfrac{h}{b}x \Rightarrow x_2 = \dfrac{b}{h}\cdot y$

La recta $\overline{AB}$ tiene por ec'n $x_1 = b$

Si $dA = s \cdot dy$ pero $s = x_1 - x_2$

Entonces: $s = b - \dfrac{b}{h}y \Rightarrow dA = \left(b - \dfrac{by}{h}\right)dy$

Por definición:

$$I_X = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 \cdot \left(b - \frac{b \cdot y}{h}\right)dy = \int_0^h \left(by^2 - \frac{b}{h}y^3\right)dy$$

$$I_X = \left(\frac{b}{3}y^3 - \frac{1}{4}\cdot\frac{b}{h}\cdot y^4\right|_0^h = \left(\frac{1}{3}b \cdot h^3 - \frac{1}{4}\cdot\frac{b \cdot h^4}{h}\right)$$

Por lo tanto : $\boxed{I_X = \dfrac{1}{12}\cdot b \cdot h^3}$

PRODUCTO DE INERCIA Se evaluará tomando en cuenta la sigte expresión.

$$I_{XY} = \int x \cdot y \, dA.$$

(7:) Calcular el producto de inercia de una fig rectangular respecto a los ejes x e Y

Si: $dA = dx \cdot dy$

Aplicando la integral doble: Tenemos:

$$I_{XY} = \iint x \cdot y \, dA$$

$$I_{XY} = \int_0^h \int_0^b x \cdot y \, dx \cdot dy$$

Entonces: $I_{X \cdot Y} = \int_0^h \left(\frac{1}{2} x^2 \cdot y \Big|_0^b \right) dy = \int_0^h \frac{1}{2} \cdot b^2 \cdot y \cdot dy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} b^2 \cdot y^2 \Big|_0^h\right)$

Por lo tanto: $I_{X \cdot Y} = \frac{1}{4} b^2 \cdot h^2 \Rightarrow$ $\boxed{I_{XY} = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}}$

(8:) Calcular el producto de inercia respecto a los ejes que pasan por su centro de gravedad.

Donde X' e Y' ejes que pasan por su centro de gravedad.

Si: $dA = dx \cdot dy$

Aplicando la def. $\overline{I}_{XY} = \int x \cdot y \, dA.$

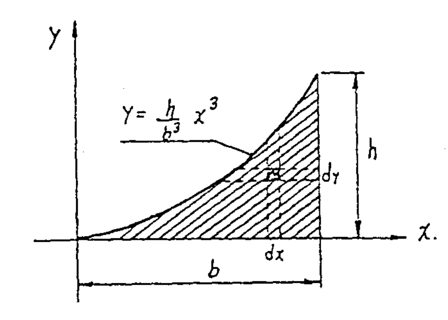
Se tiene: $\overline{I}_{XY} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x \cdot y \, dy \, dx.$

Entonces: $\overline{I}_{XY} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{1}{2} x \cdot y^2 \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \right) dx. = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{1}{2} x \left(\frac{h^2}{4} - \left(-\frac{h}{2}\right)^2 \right) dx.$ (= 0)

Por lo tanto: $\boxed{\overline{I}_{XY} = 0}$

En consecuencia, según el resultado anterior se puede deducir : " El producto de inercia es igual a CERO cuando dichos ejes pasen por su centro de gravedad, además si la figura es simétrica", por otra parte el producto de inercia puede ser positivo, cero ó negativo dependiendo de la ubicación de la figura en el plano carteciano.

9.- Determinar el producto de inercia del área sombreada con respecto a los ejes X e Y.



Si : $dA = dx \cdot dy$

Por definición: $I_{xy} = \int x \cdot y \, dA.$

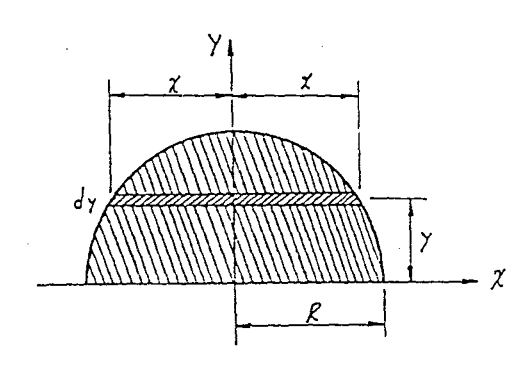
$$\Rightarrow \quad I_{x \cdot y} = \int_0^{\frac{1}{b^3}x^3} \int_0^b x \cdot y \, dx \cdot dy$$

$$I_{xy} = \int_0^b x\left(\frac{1}{2} y^2 \Big|_0^{\frac{hx^3}{b^3}}\right) dx$$

Entonces: $I_{xy} = \int_0^b \frac{1}{2} x \cdot \frac{h^2}{b^6} \cdot x^6 \, dx = \int_0^b \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{b^6} \cdot x^7 dx = \frac{h^2}{2 \cdot b^6} \left(\frac{1}{8} x^8 \Big|_0^b\right.$

Por lo tanto: $I_{xy} = \frac{1}{16} \cdot h^2 \cdot \frac{b^8}{b^6}$ $\therefore$ $\boxed{I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{16.}}$

10.- Determinar el momento de inercia con respecto al eje X del área semicircular.



La ecuación de la circunferencia :

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{R^2 - y^2}$$

Además: $dA = 2x \, dy$

Aplicando la definición:

$$I_x = \int y^2 dA = \int y^2 \cdot 2x \cdot dy.$$

Entonces: $I_x = \int_0^R 2 y^2 \sqrt{R^2 - y^2}\, dy$ Ca. Va: $y = R \operatorname{sen} \theta$

$dy = R \cos\theta\, d\theta$.

$I_x = \int 2 (R \operatorname{sen}\theta)^2 \sqrt{R^2 - R^2 \operatorname{sen}^2\theta} \cdot R \cos\theta\, d\theta$.

Para hacer cambio de límites : si : $y = 0 \Rightarrow \theta = 0°$

si $y = R \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

Desarrollando: $I_x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \operatorname{sen}^2\theta \cdot \cos\theta \cdot R \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$ pero: $\cos\theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$

$I_x = 2 R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\theta \cdot \cos^2\theta\, d\theta$.

Integrando tenemos: $\boxed{I_x = \frac{\pi \cdot R^4}{8}}$

TEOREMA DE STEINER

(11.-) El área sombreada tiene un $A = 15 \cdot 10^3\ cm^2$ y tiene un $I_y = 25 \cdot 10^6\ cm^4$, Determinar su momento de Inercia con respecto al eje Y', El eje $\bar{Y} - \bar{Y}$ es centroidal.

Aplicando la definición:

$I_y = \bar{I}_y + d^2 \cdot A$ donde $d = 28$ cm.

$\Rightarrow \bar{I}_y = -d^2 \cdot A + I_y$

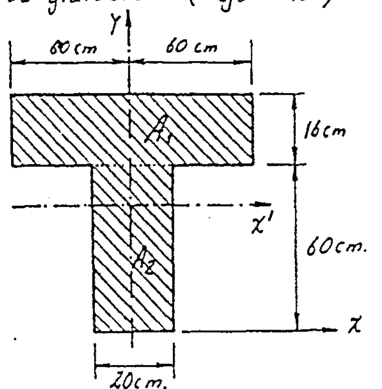
$\bar{I}_y = -28^2 \cdot 15 \cdot 10^3 + 25 \cdot 10^6$

Entonces: $\bar{I}_y = 13,24 \cdot 10^6\ (cm^4)$

Luego:

$I_{y'} = \bar{I}_y + d^2 \cdot A = 13,24 \cdot 10^6 + 12^2\, 15 \cdot 10^3 \Rightarrow \boxed{I_{y'} = 15,4 \cdot 10^6\ (cm^4)}$

12.- Determinar el momento de inercia del perfil indicado respecto a su centro de gravedad (eje x')



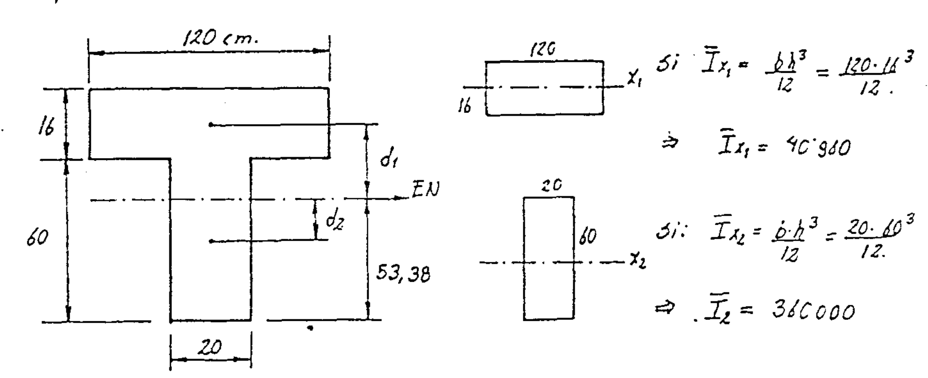
1° Se debe encontrar el eje neutro, o sea se debe encontrar $\overline{Y}$

$$\Rightarrow \overline{Y} = \frac{A_1 \cdot Y_1 + A_2 \cdot Y_2}{A_1 + A_2}$$

$$\therefore \overline{Y} = \frac{(60+60) \cdot 16 \cdot 68 + 60 \cdot 20 \cdot 30}{(60+60) \cdot 16 + 60 \cdot 20}$$

$$\overline{Y} = 53,385 \text{ (cm)}$$

2° Aplicamos el Teorema de Steiner : $I_x = \overline{I}_x + d^2 A$.



Elemento	A_i	d_i	$\overline{I}_{x_i}$	$d_i^2 \cdot A_i$
(rectángulo horizontal)	1920	14,62	40960	410389,3
(rectángulo vertical)	1200	23,38	360000	655949,3
Σ			400960	1066338,6

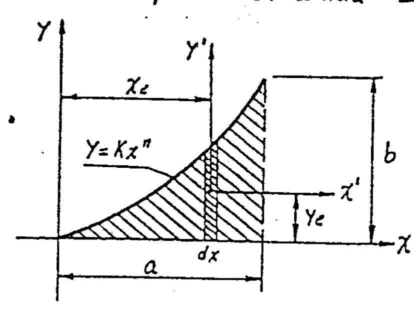
$$\Rightarrow I_{x'} = \Sigma \overline{I}_{x_i} + \Sigma d_i^2 \cdot A_i$$

$$I_{x'} = 400960 + 1066338,6$$

Por lo tanto:

$$\boxed{I_{x'} = 1,47 \cdot 10^6 \text{ (cm}^4\text{)}}$$

(13.-) Calcular el producto de Inercia I_{XY} de la fig marcada.



Solucion: Si. x', y' (ejes que pasan por el centroide del elemento diferencial).

Concide rando: $Y = Kx^n$

Si: $x = a \wedge Y = b \Rightarrow K = \frac{b}{a^n}$

Por definición: $dI_{XY} = d\bar{I}_{XY} + x_e \cdot Y_e \cdot dA$; pero. $d\bar{I}_{XY} = 0$ (elemento reclangular, además los ejes pasan por C.G.)

Además: $x_e = x$.

$Y_e = \frac{Y}{2}$.

Por lo tanto: $dI_{XY} = x \cdot \frac{Y}{2} \cdot dA$; pero $dA = Y \cdot dx$.

Integrando m/m. $I_{XY} = \int \frac{1}{2} x Y^2 dx$. ; $Y = \frac{b}{a^n} \cdot x^n$.

$$I_{XY} = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{b^2}{a^{2n}} \cdot x^{2n+1} dx = \frac{b^2}{2a^{2n}}\int_0^a x^{2n+1} dx = \frac{b^2}{2a^{2n}}\left(\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right|_0^a$$

$$I_{XY} = \frac{b^2}{2a^{2n}} \cdot \frac{a^{2n+2}}{2n+2} = \frac{b^2 \cdot a^{2n} \cdot a^2}{2a^{2n} \cdot (2n+2)} = \frac{a^2 \cdot b^2}{2 \cdot 2(n+1)}$$

Entonces:

$$\boxed{I_{XY} = \frac{a^2 \cdot b^2}{4(n+1)}}$$ → solución.

(14.-) Calcular el producto de inercia del área sombreada que se muestra en la siguiente figura.

Y Y' Xe $Y = 3\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{16}\right)$ X' Ye dx. X

Si : $dA = y \cdot dx$. ; además $x_e = x \wedge y_e = \frac{1}{2} y$

Por definición: $dI_{xy} = d\bar{I}_{xy} + x_e \cdot y_e \cdot dA$; donde $d\bar{I}_{xy} = 0$

$$\Rightarrow dI_{xy} = \frac{1}{2} x \cdot y \, dA. = \frac{1}{2} x \cdot y^2 dx. \quad ; \text{ pero: } \quad y = 3\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{16}\right)$$

Entonces:

$$I_{xy} = \frac{1}{2}\int x \cdot \left(3\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{16}\right)\right)^2 dx. = \frac{9}{2}\int x\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{16}\right)^2 dx.$$

Para hallar los límites: ó el intervalo:

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow 3\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{16}\right) = 0 \Rightarrow x\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{16}\right) = 0$$

de donde: $x_1 = 0 \wedge x_2 = 8$

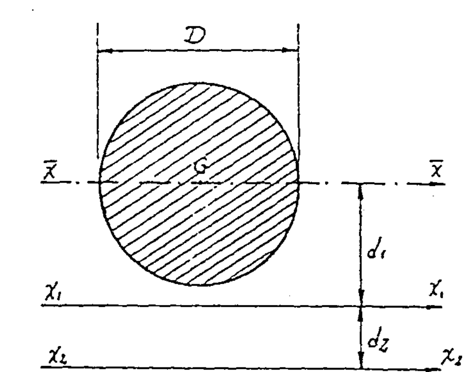
Por lo tanto:

$$I_{xy} = \frac{9}{2}\int_0^8 x\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{256}\right) dx = \frac{9}{2}\int_0^8 \left(\frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{256}\right) dx.$$

$$I_{xy} = \frac{9}{2}\left(\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{80}x^5 + \frac{1}{1536}x^6\right\Big|_0^8 = \frac{9}{2}\left(256 - \frac{2048}{5} + \frac{512}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{xy} = \frac{384}{5} = 76{,}8 \, (u^4)}$$

(15.-) Determinar el diámetro "D" y su momento de inercia respecto a su eje centroidal paralelo al eje $x_1 - x_1$, sabiendo que sus momentos de Inercia $I_{x_1} = 4{,}1 \cdot 10^3$ cm^4 y $I_{x_2} = 6{,}9 \cdot 10^3$ cm^4 y que además $d_1 = 3{,}0$ cm ; $d_2 = 4{,}0$ cm.



Considerando el eje $x_1 - x_1$ se tiene.

$$I_{x_1} = \bar{I}_x + d_1^2 \cdot A. \quad \ldots (1)$$

Para el eje $x_2 - x_2$

$$I_{x_2} = \bar{I}_x + (d_1 + d_2)^2 \cdot A. \quad \ldots (2)$$

De (1) y (2) despejamos A:

$$A = \frac{I_{x_1} - \bar{I}_x}{d_1^2} \quad ; \quad A = \frac{I_{x_2} - \bar{I}_x}{(d_1+d_2)^2} \quad \ldots\ldots (3)$$

Si $A = A \Rightarrow$

$$\frac{I_{x_1} - \bar{I}_x}{d_1^2} = \frac{I_{x_2} - \bar{I}_x}{(d_1+d_2)^2}$$

Entonces:

$$(I_{x_1} - \bar{I}_x)(d_1+d_2)^2 = d_1^2(I_{x_2} - \bar{I}_x)$$

$$I_{x_1}(d_1+d_2)^2 - \bar{I}_x(d_1+d_2)^2 = d_1^2 \cdot I_{x_2} - d_1^2 \cdot \bar{I}_x$$

$$\bar{I}_x\left(d_1^2 - (d_1+d_2)^2\right) = d_1^2 I_{x_2} - I_{x_1}(d_1+d_2)^2$$

Por lo que:

$$\bar{I}_x = \frac{d_1^2 I_{x_2} - I_{x_1}(d_1+d_2)^2}{d_1^2 - (d_1+d_2)^2} = \frac{3^2 \cdot 6{,}9 \cdot 10^3 - 4{,}1 \cdot 10^3 \cdot (3+4)^2}{3^2 - (3+4)^2}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\bar{I}_x = 3470 \ (cm^4)}$$

Teniendo $\bar{I}_x$ reemplazamos en (3):

Entonces:

$$A = \frac{I_{x_1} - \bar{I}_x}{d_1^2} \qquad \text{pero: } A = \frac{1}{4}\pi \cdot D^2$$

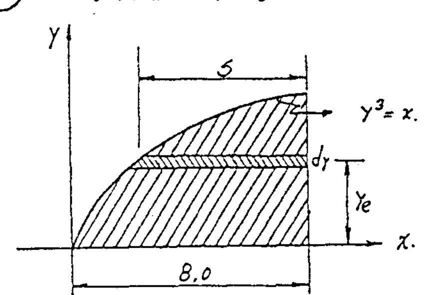
$$\Rightarrow \frac{1}{4}\pi \cdot D^2 = \frac{I_{x_1} - \bar{I}_x}{d_1^2} \quad \Rightarrow \quad D = \sqrt{\frac{4(I_{x_1} - \bar{I}_x)}{\pi \cdot d_1^2}} = \sqrt{\frac{4(4{,}1 \cdot 10^3 - 3470)}{\pi \cdot 3^2}}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{D = \sqrt{\frac{2520}{9 \cdot \pi}} = 9{,}44 \ (cm)}$$

RADIO DE GIRO

(16:) Determinar el radio de Giro respecto al eje x de la figura marcada.



Segun la definición:

$$K_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

Por lo tanto significa hallar A y I_x.

$dA = s\,dy$ donde: $s = 8 - x$

Calculo de A: $\Rightarrow A = \int (8 - y^3)\,dy$ los limites será: si $x = 0 \Rightarrow y = 0$

si $x = 8 \Rightarrow y = 2$

$$\Rightarrow A = \int_0^2 (8 - y^3)\,dy = \left(8y - \tfrac{1}{4}y^4\right|_0^2$$

$$\therefore \boxed{A = 12\ (u^2)}$$

Cálculo de I_x: $\Rightarrow I_x = \int_0^2 y^2\,dA$ donde: $dA = s\,dy = (8 - x)\,dy$

Ademas: $x = y^3$

$$I_x = \int_0^2 y^2(8 - y^3)\,dy = \int_0^2 (8y^2 - y^5)\,dy = \left(\tfrac{8}{3}y^3 - \tfrac{1}{6}y^6\right|_0^2$$

Entonces: $\boxed{I_x = \frac{32}{3} = 10,667\ (u^4)}$

Por lo tanto: $K_x = \sqrt{\frac{32/3}{12}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \boxed{K_x = \tfrac{2}{3}\sqrt{2} = 0,94\ (u.)}$$

Tambien se puede resolver tomando en cuenta un elemento diferencial vertical.

Entonces: $dI_x = d\bar{I}_x + d^2 dA$. Aplicando el teorema de Steiner.

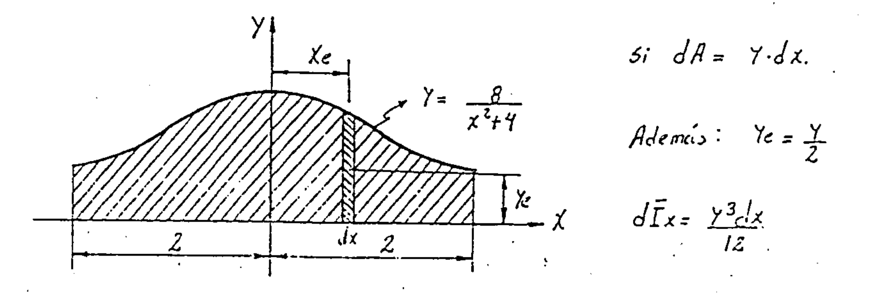
Si: $dA = y\,dx$; $d\bar{I}x = \frac{y^3 dx}{12}$; $d = \frac{y}{2}$.

Entonces: $dIx = \frac{y^3}{12}dx + \frac{y^2}{2^2}\cdot y\,dx = \left(\frac{1}{12}y^3 + \frac{1}{4}y^3\right)dx.$ $\int$ do m/m..

$\int dIx = \int_0^8 \frac{1}{3}y^3\,dx$ pero: $y^3 = x.$

$Ix = \frac{1}{3}\int_0^8 x\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2\Big|_0^8\right) \Rightarrow$ $\boxed{Ix = \frac{32}{3} = 10,667(u^4)}$

(17:) Determinar el radio de Giro Kx. de la fig sombreada:



Si $dA = y\cdot dx.$

Además: $Yc = \frac{y}{2}$

$d\bar{I}x = \frac{y^3 dx}{12}$

Aplicando el teorema de Steiner. $dIx = d\bar{I}x + d^2\cdot dA$: $d = Yc.$

Entonces: $dIx = \frac{y^3}{12}dx + \left(\frac{y}{2}\right)^2\cdot y\,dx.$

$dIx = \frac{y^3}{12}dx + \frac{1}{4}y^3 dx.$ donde: $y^3 = \frac{512}{(x^2+4)^3}$

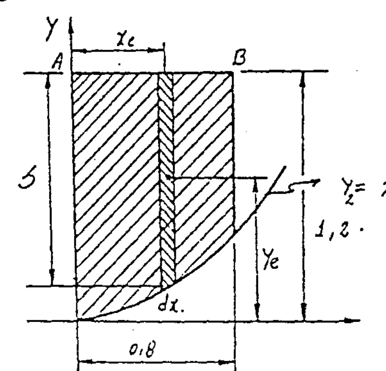
$\int$ do m/m. $dIx = \frac{512}{12}\cdot\frac{dx}{(x^2+4)^3} + \frac{512}{4}\frac{dx}{(x^2+4)^3}$

$Ix = \frac{512}{3}\int_{-2}^{2}\frac{dx}{(x^2+4)^3} = \frac{1}{3}\left(3\pi + 8\right) \Rightarrow$ $\boxed{Ix = 5,808(u^4)}$

Además: $A = \int_{-2}^{2} y\,dx = \int_{-2}^{2}\frac{8\,dx}{(x^2+4)} = 2\pi \Rightarrow$ $\boxed{A = 6,283\ (u^2)}$

Por lo tanto: $Kx = \sqrt{\frac{Ix}{A}} = \sqrt{\frac{5,808}{6,283}} \Rightarrow$ $\boxed{Kx = 0,9{:}1\ u.}$

(18.-) Para el área sombreada encuéntrese I_x é I_Y; Además K_Y y K_x.



La recta A-B tiene por ecuación:

$$Y_1 = 1,2.$$

Entonces: $dA = S\,dx$ donde: $S = 1,2 - x^2$

$$\therefore \quad dA = (1,2 - x^2)dx.$$

* Cálculo de Area "A": $\Rightarrow A = \int_0^{0,8} (1,2 - x^2)dx = \left(1,2\,x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^{0,8}$

Entonces: $A = 0,789 (\mu^2).$

* Cálculo de Momentos de Inercia: I_x, I_Y.

Por definición (steiner): $dI_x = d\bar{I}_x + d^3 dA$. donde: $d = Y_e = \frac{S}{2} + Y_2$.

Entonces: $dI_x = \frac{S^3 dx}{12} + \left(\frac{S}{2} + Y_2\right)^2 . S\,dx$. Además $S = 1,2 - x^2$.

S'do m/m. $I_x = \int_0^{0,8} \left[\frac{1}{12}(1,2 - x^2)^3 + \left(\frac{1}{2}(1,2 - x^2) + x^2\right)^2 (1,2 - x^2)\right] dx$

Por lo tanto: $I_x = \int_0^{0,8} \left[\frac{1}{12}(1,2 - x\ )^3 + \left(\frac{1,2}{2} + \frac{x^2}{2}\right)^2 (1,2 - x^2)\right] dx \Rightarrow$ $I_x = 0,4508$

de la misma forma: $I_Y = \int x^2 dA$ donde. $dA = (1,2 - x^2)dx$.

$$\Rightarrow \quad I_Y = \int_0^{0,8} x^2 (1,2 - x^2)dx = \int_0^{0,8} (1,2x^2 - x^4)dx = \left(\frac{1,2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^{0,8}$$

Por lo tanto: $I_Y = 0,1393 (\mu^4)$

Entonces: $K_x = \sqrt{\frac{0,4508}{0,789}} \Rightarrow$ $K_x = 0,756 (\mu.)$

Así mismo: $K_Y = \sqrt{\frac{0,1393}{0,789}} \Rightarrow$ $K_Y = 0,420 (\mu)$

(19:) Para el área sombreada que está limitada por la curva $Y = \text{sen}\,x$ y por una recta que pasa por (0,0) y $(\frac{\pi}{2}, 1)$, Calcular I_x e I_Y, además de los radios de giro K_x y K_y

La ecuación de la recta O-A estará dado por:

$$\frac{Y - Y_1}{X - X_1} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - Y_1} \quad \text{donde: } (X_1, Y_1) = (0,0) \quad (X_2, Y_2) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$$

Entonces: $\frac{Y - 0}{X - 0} = \frac{1 - 0}{\frac{\pi}{2} - 0} \Rightarrow Y = \frac{2X}{\pi}$

Por lo tanto: $dA = S \cdot dx$; donde: $S = \text{Sen}\,X - \frac{2X}{\pi} \Rightarrow dA = \left(\text{sen}\,X - \frac{2X}{\pi}\right) dx.$

$$\int dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\text{sen}\,x - \frac{2x}{\pi}\right) dx. = \left(-\cos x - \frac{x^2}{\pi}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = -\cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4\pi} + \cos 0 + 0 \Rightarrow \boxed{A = 1 - \frac{1}{4}\pi = 0,215 (u^2)}$$

Calculo de I_x é I_Y:

Aplicando la definición del teorema de Steiner:

$$dI_x = d\bar{I}_x + d^2 \cdot dA. \qquad \text{donde.} \quad d = Y_e = \frac{S}{2} + \frac{2X}{\pi}$$

$\int$'do m/m. $\quad I_x = \int \frac{S^3 dx}{12} + \int \left(\frac{S}{2} + \frac{2x}{\pi}\right)^2 \left(\text{Sen}\,x - \frac{2x}{\pi}\right) dx$; Ademas: $S = \left(\text{Sen}\,x - \frac{2x}{\pi}\right)$

$$I_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{12}\left(\text{Sen}\,x - \frac{2x}{\pi}\right)^3 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\left(\text{Sen}\,x - \frac{2x}{\pi}\right) + \frac{2x}{\pi}\right)^2 \left(\text{Sen}\,x - \frac{2x}{\pi}\right) dx.$$

$$I_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\text{Sen}\,x - \frac{2x}{\pi}\right)^3 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\text{Sen}\,x + \frac{x}{\pi}\right)^2 \left(\text{Sen}\,x - \frac{2x}{\pi}\right) dx.$$

$$I_x = -\frac{2\cdot\pi^2 - 45}{4\pi} + \frac{8\pi^2 - 9\pi - 288}{12\cdot\pi^2} + \frac{8\pi^3 + 3\pi + 96}{48\pi^2} - \frac{15}{16\cdot\pi}.$$

$$I_x = 0,0064 + 0,0908 \Rightarrow I_x =$$

Por lo tanto: $\boxed{I_x = 0,0972 (u^4).}$

De la misma forma: $I_Y = \int x^2 dA$. donde: $dA = (\operatorname{sen} x - \frac{2x}{\pi})dx$.

Entonces: $I_Y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\operatorname{sen} x - \frac{2x}{\pi})dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (x^2 \operatorname{sen} x - \frac{2x^3}{\pi})dx$.

$$I_Y = \pi - \frac{1}{32}\pi^3 - 2.$$

Finalmente: $\boxed{I_Y = 0{,}173\ (u^4)}$

* Calculo de radios de giro:

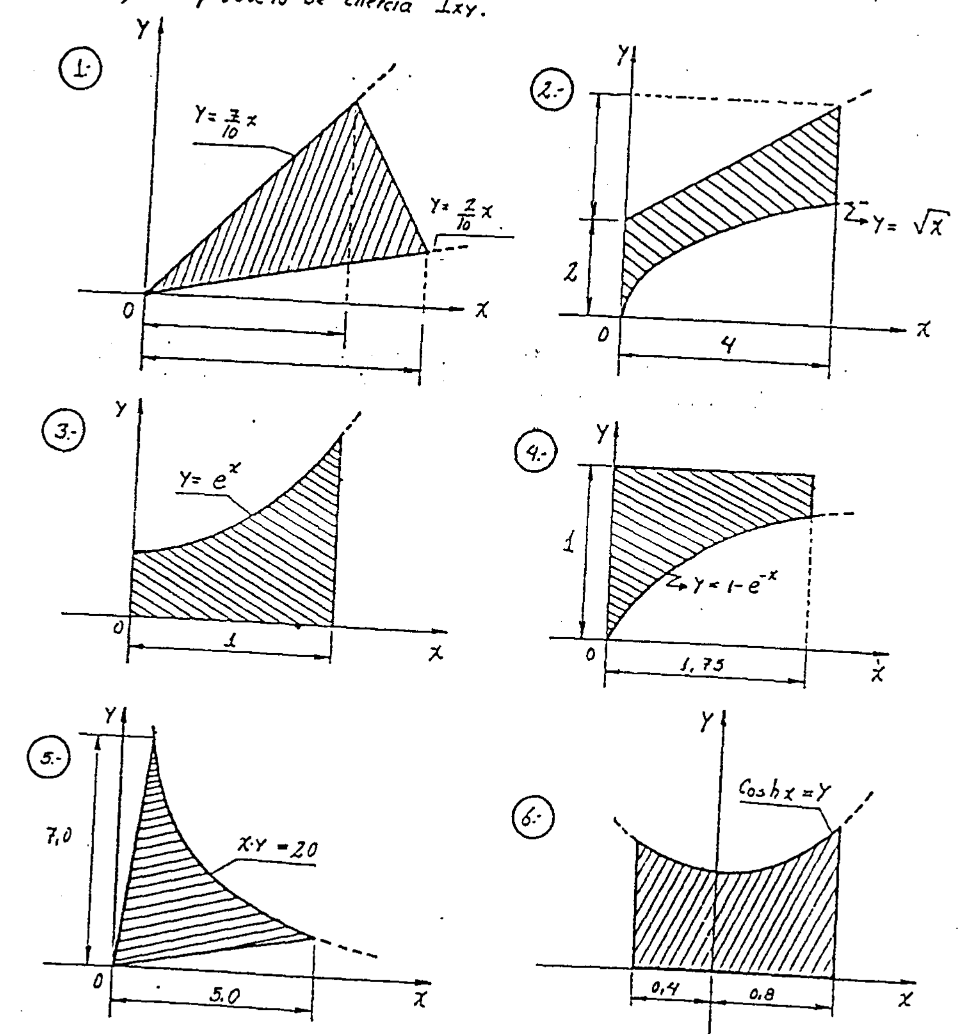
Por definición: $K_X = \sqrt{\frac{I_X}{A}} = \sqrt{\frac{0{,}0972}{0{,}215}} \Rightarrow \boxed{K_X = 0{,}672\ (u)}$

de la misma forma: $K_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \sqrt{\frac{0{,}173}{0{,}215}} \Rightarrow \boxed{K_Y = 0{,}897 (u)}$

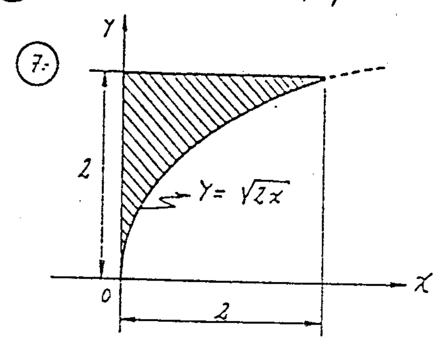
PROBLEMAS PROPUESTOS

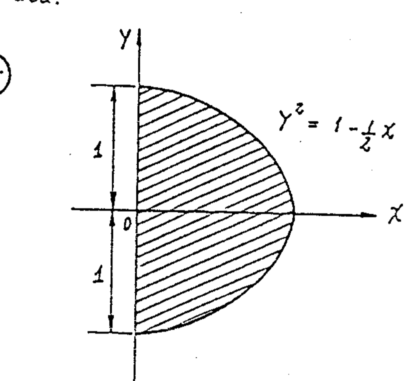
I.- *Para el área sombreada encontrar:*

a) Los momentos de inercia I_x e I_y.
b) Los momentos de inercia respecto de su centroide $\bar{I}_x$, $\bar{I}_y$.
c) Los radios de giro, K_x, K_y
d) El producto de inercia I_{xy}.

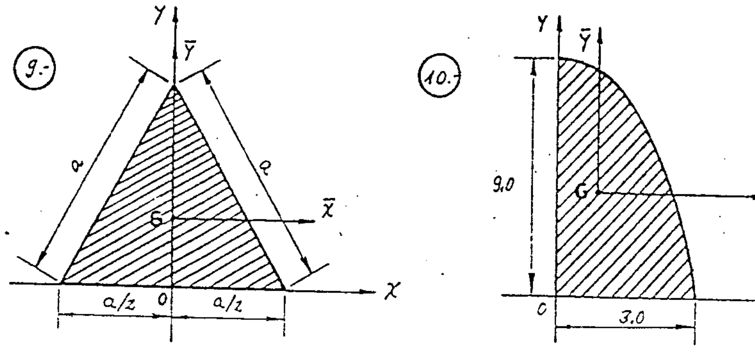


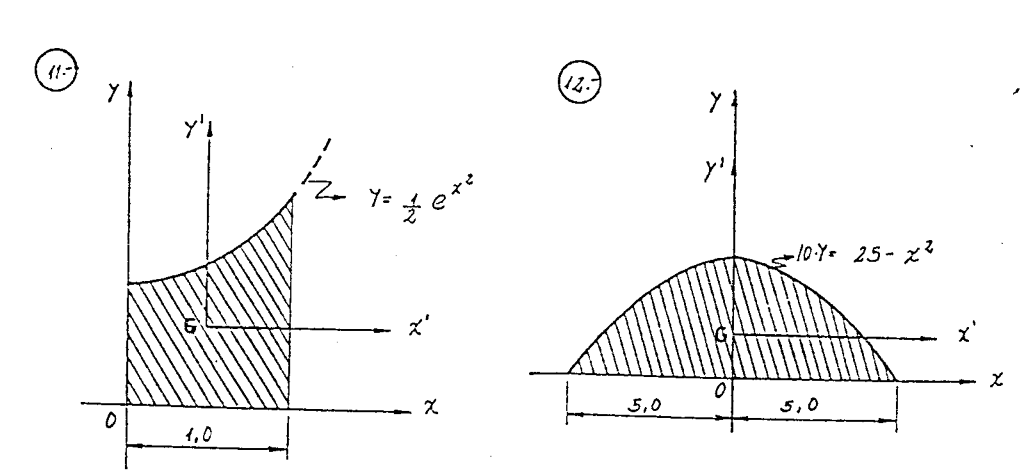
II.- *Determínese I_x é I_y para el área sombreada.*

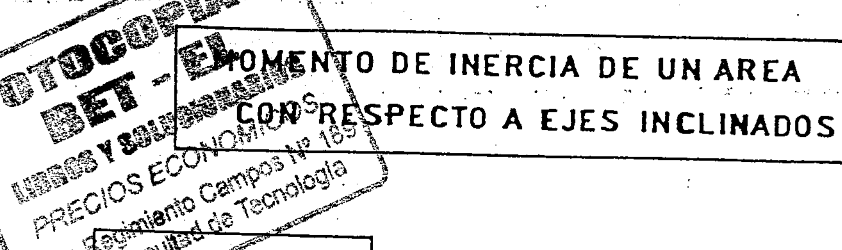


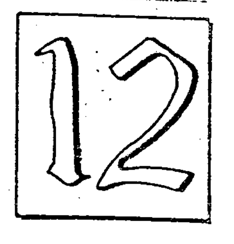


III.- *Calcúlese los momentos de inercia respecto de su centroide $\bar{I}_x$, $\bar{I}_y$ para la fig sombreada.*





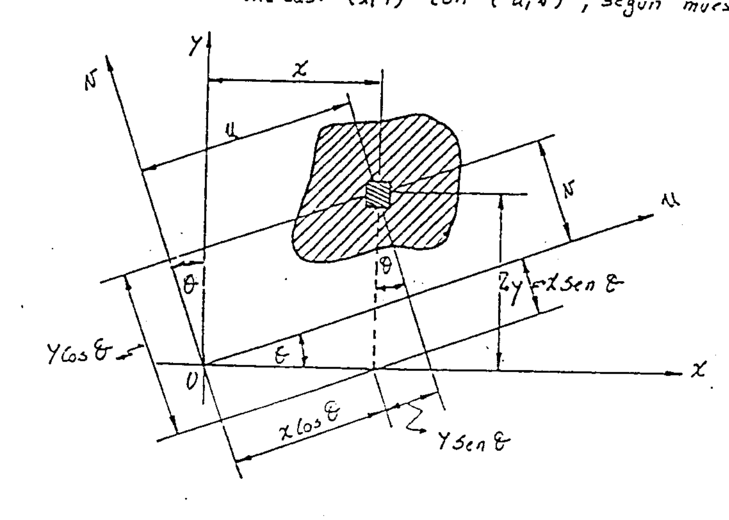




MOMENTO DE INERCIA DE UN AREA CON RESPECTO A EJES INCLINADOS

12.1. GENERALIDADES.-

En el diseño estructural a menudo es necesario calcular los momentos de inercia (I_u, I_v). además del producto de inercia (I_{vu}) de un área con respecto a otros ejes inclinados (u, v) que son ejes que forman un ángulo (θ) respecto a los ejes (x, y) del sistema original. Por lo tanto se utilizarán las "ecuaciones de transformación" las cuales relacionan las coordenadas. (x, y) con (u, v), segun muestra la fig. siguiente.



según fig se tiene :

$$u = x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta$$
$$v = y\cos\theta - x\,\text{sen}\,\theta$$

Además por definición :

$$dI_u = v^2 dA \quad \ldots\ldots(1)$$
$$dI_v = u^2 dA \quad \ldots\ldots(2)$$
$$dI_{uv} = u \cdot v \cdot dA \quad \ldots(3)$$

Reemplazando en (1) u y v tenemos :

$$dI_u = (y\cos\theta - x\,\text{sen}\,\theta)^2 dA. \Rightarrow \quad I_u = \int (y^2\cos^2\theta - 2yx\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + x^2\text{sen}^2\theta)\, dA.$$

Aplicando identidades trigonométricas :

$$\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta.$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta.$$

A la ecuación anterior reemplazando equivalentes trigonométricos se tiene:

$$I_u = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta - I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \qquad (I)$$

Realizando las mismas operaciones para I_v y I_{uv}, se tiene:

$$I_v = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta + I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \qquad (II)$$

$$I_{uv} = \frac{1}{2}(I_x - I_y)\,\text{sen}\,2\theta + I_{xy}\cos 2\theta. \qquad (III)$$

Las anteriores expresiones nos dan los momentos de inercia I_u, I_v, además del producto de inercia I_{uv} en funcion de I_x, I_y y I_{xy} respectivamente.

Por otro lado, si se desea encontrar el momento polar de inercia I_o, se tiene:

$$I_o = I_u + I_v$$

sumando (I) y (II) se llega a la expresión sigte:

$$I_o = I_u + I_v = I_x + I_y.$$

lo que nos indica que el momento polar de inercia es independiente del giro de ejes.

1.22 MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA.

En las expresiones anteriores (I), (II), y (III) se puede notar que los valores I_v, I_u, e I_{uv} dependen del ángulo de inclinación de los ejes (u, v), por lo tanto, en esta parte se determinará este ángulo de inclinación (θ) para los cuales I_u é I_v se hacen máximos y mínimos. A este conjunto de "ejes particulares" se llaman "

"ejes principales" de un área, por lo que darán tambien "Momentos principales de inercia".

Si aplicamos, la teoría de máximos y mínimos se tiene para un ángulo (θ) en existe un (θ_p) ángulo principal que define la orientación de un área, por lo tanto diferenciando la expresión (I) con respecto a θ, se tiene:

$$\frac{dI_u}{d\theta} = -2 \cdot \frac{1}{2}(I_x - I_y)\, sen\, 2\theta - 2 I_{xy} \cos 2\theta.$$

Igualando a "0" esta expresión para hallar θ para el cual I_u sea máximo.

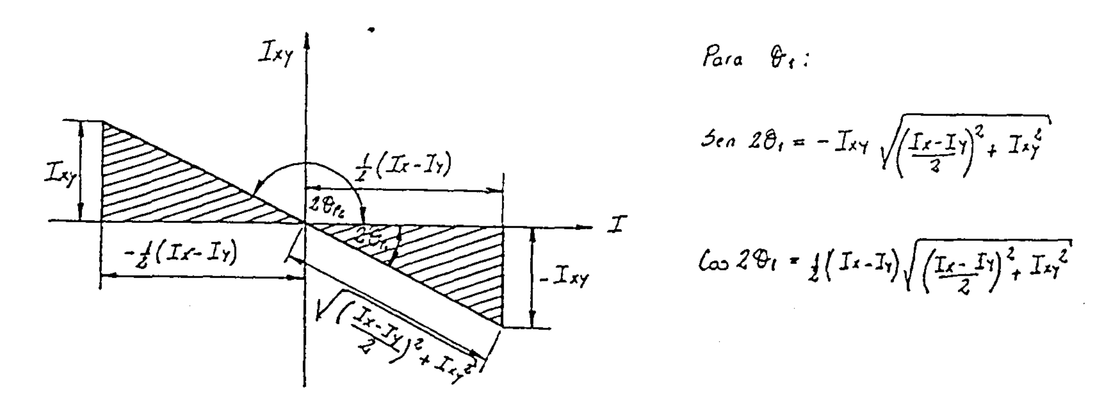
$$-(I_x - I_y)\, sen\, 2\theta - 2 I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\frac{sen\, 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{-2 I_{xy}}{I_x - I_y} \Rightarrow tg\, 2\theta = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}.$$

Si $\theta_p = \theta$ entonces:

$$\boxed{tg\, 2\theta_p = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}} \qquad (*)$$

Esta ecuación (*) tiene dos raices (θ_{p1} y θ_{p2}) los cuales se encuentran separados 90°, los mismos indican la inclinación de ejes principales.; Para sustituir en la ecuación (I) primero se debe determinar $Sen\, 2\theta_{p1}$ y $\cos 2\theta_{p2}$ los mismos se encontrarán según la fig. siguiente.



Para θ_1:

$$Sen\, 2\theta_1 = -I_{xy} \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$\cos 2\theta_1 = \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

De la misma manera para θ_2 ó θ_{P_2}

$$Sen\, 2\theta_{P_2} = I_{xy}\sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$Cos\, 2\theta_{P_2} = -\frac{1}{2}\left(I_x-I_y\right)\sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Sustituyendo los valores de senos y cosenos en las ecuaciones (I) ó (II), además simplificando, se obtiene la sigte relación:

$$\boxed{I_{\substack{max\\min}} = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}} \qquad (IV)$$

Dependiendo de los signos elegidos, esta expresión los momento de inercia máximos (I_{max}) y momentos de inercia mínimos (I_{min})

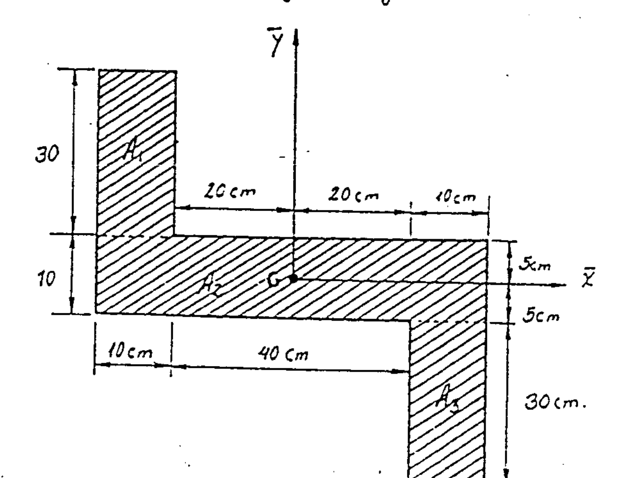
Además si reemplazamos en la ecuación (III) los valores de θ_{P_1} y θ_{P_2} se obtiene :

$$I_{xy} = 0$$

Por lo que : "El producto de inercia respecto a los ejes principales es igual a "CERO""

PROBLEMAS RESUELTOS

1.- Determinar los momentos de inercia principales de la sección transversal mostrada en la siguiente figura.



Como se trata de un área compuesta, se subdividirá en áreas A_1, A_2, A_3

1° Se calculará los momentos de inercia I_x e I_Y, dando uso de una tabla como sigue.

$$\bar{I}_{xi} = \frac{bh^3}{12} \; ; \; \bar{I}_{Yi} = \frac{1}{12} hb^3$$

Elemento	$\bar{I}_x$	$\bar{I}_Y$	d_x	d_Y	$d_x^2 A_i$	$d_Y^2 \cdot A_i$	A_i	I_x	I_Y
A_1	22500	2500	-25	20	187500	120000	300	142500	190000
A_2	5000	180000	0,0	0,0	0,0	0,0	600	5000	180000
A_3	22500	2500	25	-20	187500	120000	300	142500	190000

Por lo tanto los I_x e I_Y se calcularón con: $I_x = \bar{I}_x + d_Y^2 \cdot A$ e $I_Y = \bar{I}_Y + d_x^2 \cdot A$.

Entonces:

$$I_{x_T} = \Sigma I_{x_i} = 29 \cdot 10^4 \; (cm^4)$$

$$I_{Y_T} = \Sigma I_{Y_i} = 56 \cdot 10^4 \; (cm^4)$$

Además para el producto de inercia se aplicará el mismo concepto:

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_{xy}^2 \cdot A.$$

Por lo tanto:

Elemento	x_i	y_i	A_i	$\bar{I}_{xyi}$	$y_i \cdot x_i \cdot A_i$	I_{xyi}
A_1	-25	20	300	0	-150000	-150000
A_2	0	0	600	0	0	0
A_3	25	-20	300	0	-150000	-150000

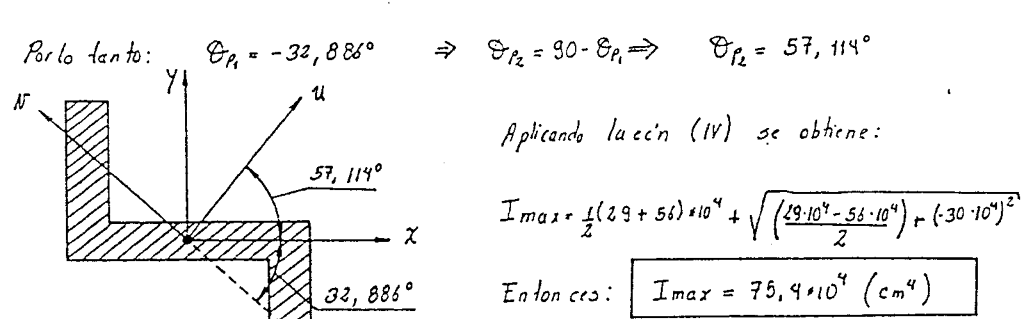
$$\Rightarrow \quad I_{xy} = \Sigma I_{xyi} \quad \therefore \quad \boxed{I_{xy} = -30{,}0 \cdot 10^4 \ (cm^4)}$$

Aplicando la ecuación (*) osea: $tg\, 2\theta_p = \dfrac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}$.

Sustituyendo valores tenemos:

$$tg\, 2\theta_p = \frac{2(-30 \cdot 10^4)}{56 \cdot 10^4 - 29 \cdot 10^4} = -\frac{60 \cdot 10^4}{27 \cdot 10^4} = -2{,}2222.$$

Por lo tanto: $\theta_{P_1} = -32{,}886°$ $\Rightarrow$ $\theta_{P_2} = 90 - \theta_{P_1} \Rightarrow$ $\theta_{P_2} = 57{,}114°$



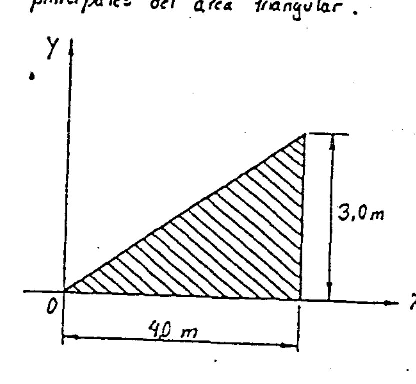
Aplicando la ec'n (IV) se obtiene:

$$I_{max} = \frac{1}{2}(29 + 56) \cdot 10^4 + \sqrt{\left(\frac{29 \cdot 10^4 - 56 \cdot 10^4}{2}\right)^2 + (-30 \cdot 10^4)^2}$$

Entonces: $\boxed{I_{max} = 75{,}4 \cdot 10^4 \ (cm^4)}$

I_{min} con (-) antes de $\sqrt{\ }$ $\Rightarrow$ $\boxed{I_{min} = 9{,}6 \cdot 10^4 \ (cm^4)}$

(2.-) Determinar el conjunto de ejes principales y los correspondientes momentos inercia principales del área triangular.



1° Hay que determinar I_x, I_y, e I_{xy}.

Aplicando las siguientes relaciones:

$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \Rightarrow A = 6.0\, m^2$

$I_x = \frac{1}{12} b \cdot h^3 \Rightarrow I_x = 9.0\, (m^4)$

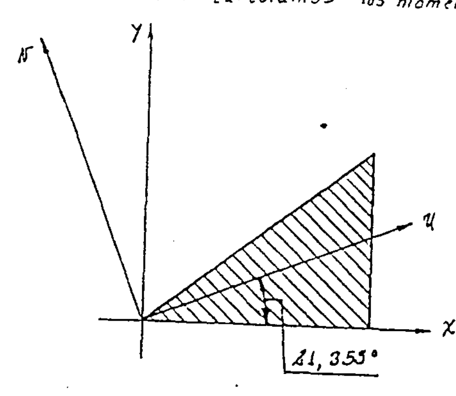
$I_y = \frac{1}{4} h\, b^3 \Rightarrow I_y = 48\, (m^4)$

Ademas: $I_{xy} = \frac{1}{8} \cdot b^2 \cdot h^2 \Rightarrow I_{xy} = 18.0\; m^4$

2° Calculamos el angulo principal (θ_p)

$$tg\, 2\theta_p = \frac{2\, I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2 \cdot 18}{48 - 9} \Rightarrow \theta_p = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{12}{13}\right) \therefore \theta_p = 21{,}355°$$

3° Finalmente calculamos los momentos I_u e I_v:



$I_u = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\theta - I_{xy} \operatorname{Sen} 2\theta$

$I_u = \frac{1}{2}(9+48) + \frac{1}{2}(9-48) \cos 42{,}71 - 18 \operatorname{Sen} 42{,}71$

Por lo tanto: $I_u = 1{,}9623\ (m^4)$

$I_v = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\theta + I_{xy} \operatorname{Sen} 2\theta$

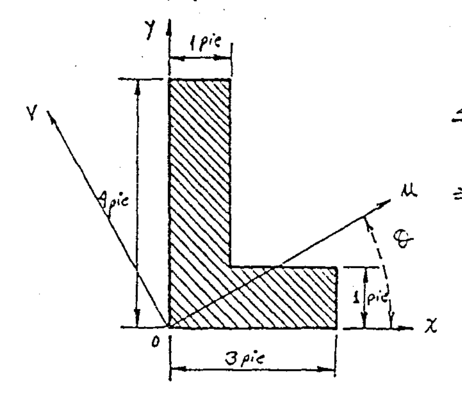
$I_v = \frac{1}{2}(9+48) - \frac{1}{2}(9-48) \cos 42{,}71 + 18 \operatorname{Sen} 42{,}71$

Entonces: $I_v = 55{,}0377\ (m^4)$

(3:) Los momentos de inercia del área de la fig (sigte.) en términos del sistema coordenado XY que se muestra son: $I_x = 22{,}0$ pie^4 ; $I_y = 10$ pie^4 e $I_{xy} = 6$ pie^4.

a): Determine I_u, I_v, e I_{uv} para $\theta = 30°$

b): Determine un conjunto de ejes principales. y los correspondientes momentos principales de inercia.



Solución : a)

Si : $I_u = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cdot \cos 2\theta - I_{xy}\cdot \operatorname{Sen} 2\theta$.

$\Rightarrow I_u = \frac{1}{2}(22 + 10) + \frac{1}{2}(22 - 10)\cdot \cos 2\cdot 30 - 6\cdot \operatorname{Sen}(2\cdot 30°)$

Por lo tanto. $I_u = 13{,}804 (\text{pie}^4)$

$I_v = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cdot \cos 2\theta + I_{xy}\cdot \operatorname{Sen} 2\theta$.

$\Rightarrow I_v = \frac{1}{2}(22+10) - \frac{1}{2}(22-10)\cos(2\cdot 30°) + 6\cdot \operatorname{Sen}(2\cdot 30°)$

Entonces: $I_v = 18{,}196 (\text{pie}^4)$

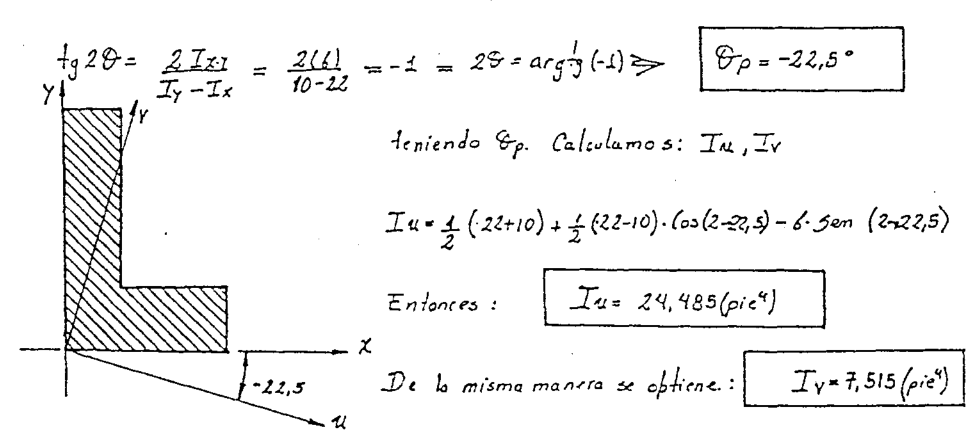
De la misma forma:

$$I_{uv} = \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cdot \operatorname{Sen}(2\theta) + I_{xy} \cos 2\theta$$

Por lo tanto: $I_{uv} = \frac{1}{2}(22 - 10)\cdot \operatorname{Sen}(2\cdot 30°) + 6\cdot \cos(2\cdot 30°) \Rightarrow I_{uv} = 8{,}196 (\text{pie}^4)$

Solucion: b) : 1°. Determinamos el ángulo principal (θ_p)

$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2(6)}{10-22} = -1 = 2\theta = \operatorname{arctg}(-1) \Rightarrow$ $\theta_p = -22{,}5°$



teniendo θ_p. Calculamos: I_u, I_v

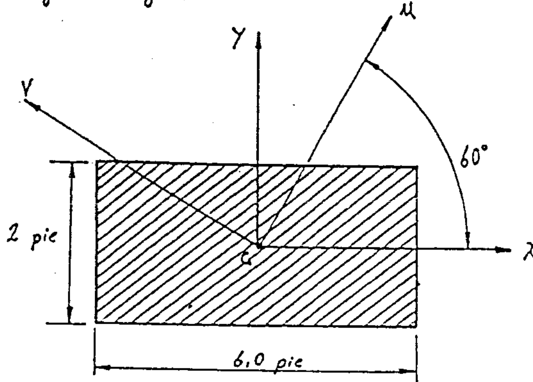
$I_u = \frac{1}{2}(22+10) + \frac{1}{2}(22-10)\cdot \cos(2\cdot -22{,}5) - 6\cdot \operatorname{Sen}(2\cdot -22{,}5)$

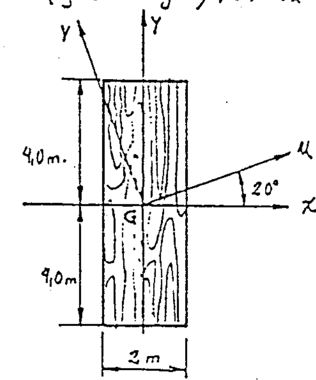
Entonces : $I_u = 24{,}485 (\text{pie}^4)$

De la misma manera se obtiene.: $I_v = 7{,}515 (\text{pie}^4)$

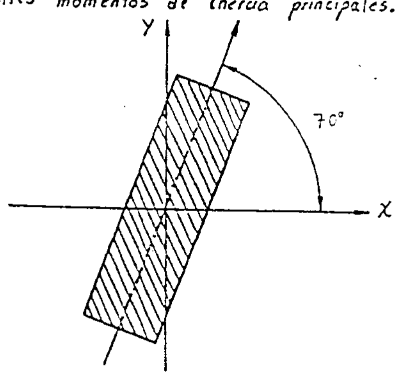
PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Determine I_u, I_v, e I_{uv} haciendo uso de ejes principales (giros de ejes), en la siguientes figura.

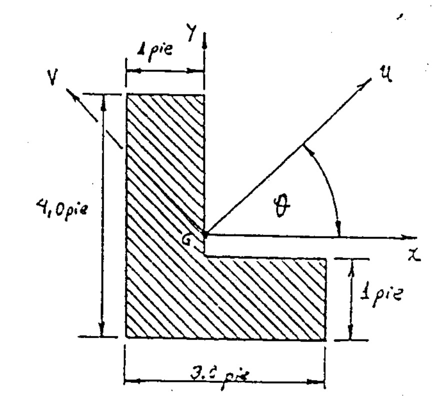




2: Los momentos de inercia del área del área rectangular mostrada son: $I_X = 76\ m^4$, $I_Y = 14,7\ m^4$, e $I_{XY} = 25,7\ m^4$. Determine un conjunto de ejes principales y los correspondientes momentos de inercia principales.

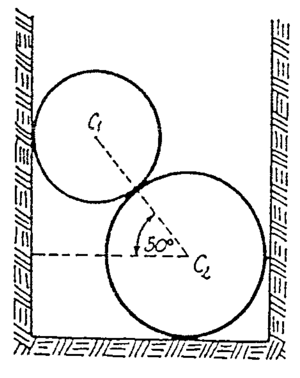


3:- Determine los momentos de inercia I_u, I_v, e I_{uv} en la fig para $\theta = 15°$.



PROBLEMAS DE EXAMENES

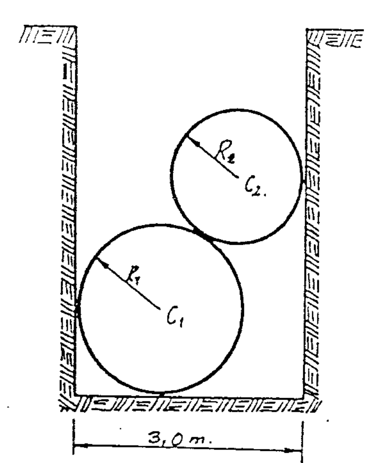
1.- Dos cilindros C_1 y C_2 descansan en un pozo en las paredes verticales y el fondo (según indica la figura). Si el cilindro C_1 tiene una masa de 1530 Kg y el cilindro C_2 una masa de 3050 Kg.



Calcular las reacciones de apoyo.

2.- Dos circulos C_1 y C_2 descansan en un pozo apoyados en las paredes verticales y el fondo (según muestra la fig.). Si C_1 = 1860 Kg de masa y C_2 = 1480 Kg de masa.

Además $R_1 = 1,40\ m$ y $R_2 = 0,8\ m$

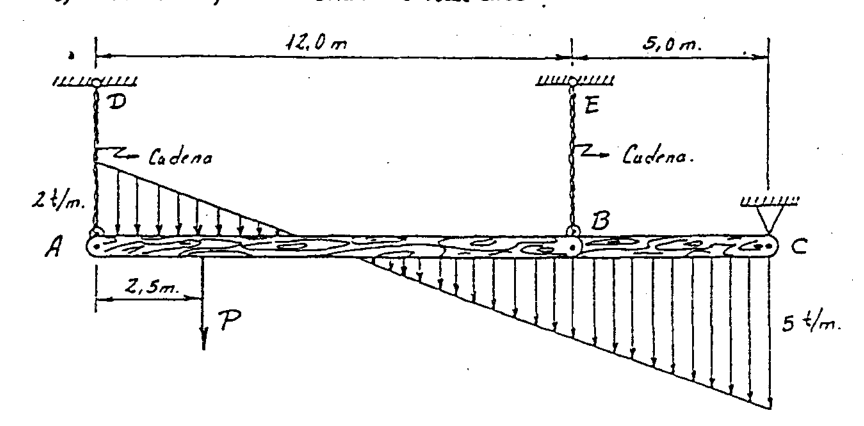


Calcular las reacciones de apoyo.

3.- Sin considerar el peso del madero ABC. Calcular:

a):- El valor de P para que las reacciones en D y E sean iguales.

b):- Si P=0, cuales serán las reacciones?



4.- Una esfera cuyo diámetro es de 2 m. y la masa de 3000 Kg, descansa sobre una artesa cuyo peso total de ésta es de 6 ton.

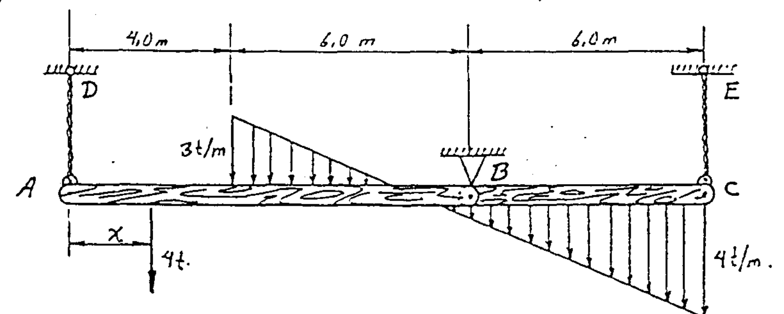
Calcular:

a):- Las reacciones de apoyo.

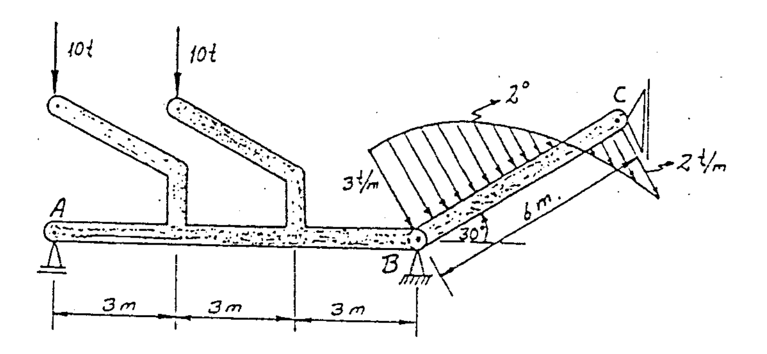
5.- Despreciando el peso del tablón ABC. Calcular:

a):- La distancia "x" para que las reacciones en D y B sean iguales.

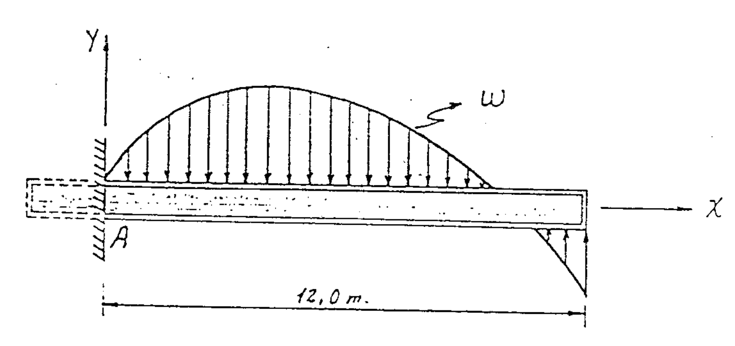
b):- Si la fuerza de 4t está en la mitad de A y B. Cuales son las reacciones?



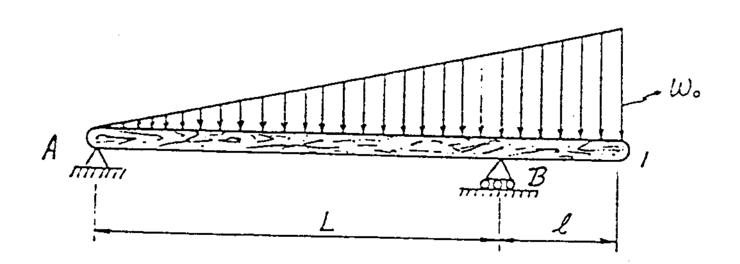
(6.-) Sin considerar el peso propio de la estructura. Calcular:
a)- La resultante y su punto de aplicación.
b)- Las reacciones de apoyo.



(7.-) La viga que se muestra está sometido a una carga $\omega = 100x - cx^2$ KN/m donde $C = Cte$, el momento de empotramiento respecto al punto A es CERO. ¿Que valor tienen las reacciones en A?



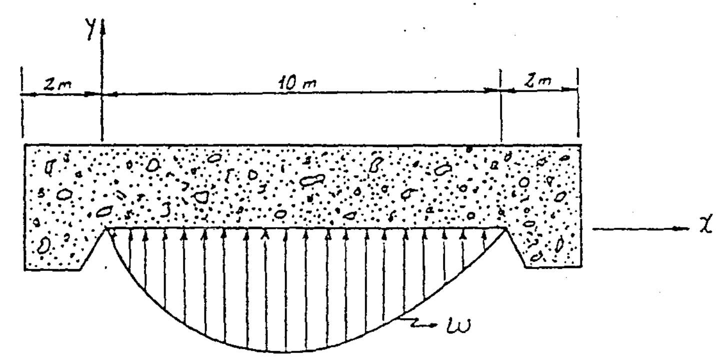
(8.-) Si $R_A = 0$, determine la reacción en B y la magnitud W_o de la estructura y carga mostrada en la fig. (despreciar el peso propio de la viga.)



9.- Las fuerzas ejercidas por el suelo sobre una sección de 10m de una cimentación de un edificio, estan dadas por: $\omega = -10x - x^2 + 0{,}2x^3$ [KN/m]

a).- Calcular la magnitud total de la carga ω.

b).- Determine la magnitud del momento respecto a "A".



10.- Si la masa del cilindro apoyado es de 6800 Kg. Calcular las reacciones de apoyo en A, B y C, de la estructura y cargas mostradas en la figura.

Datos:

$m_{cilin.} = 6800$ Kg.

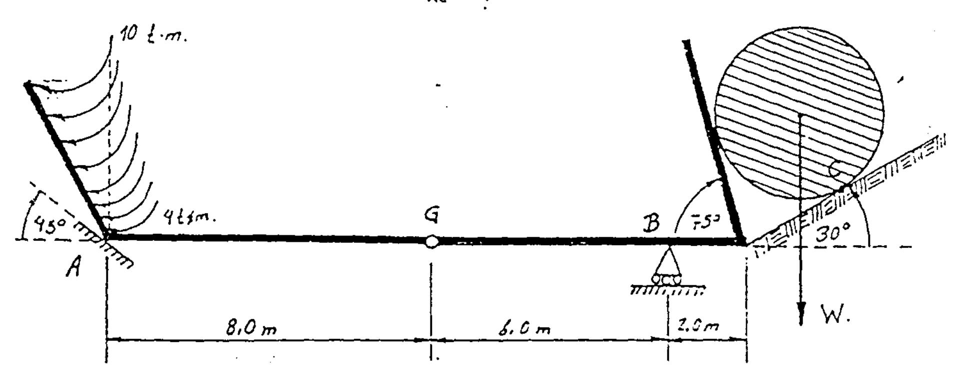
Incognitas:

$R_{A_1} = ?$

$R_{A_2} = ?$

$R_B = ?$

$R_C = ?$

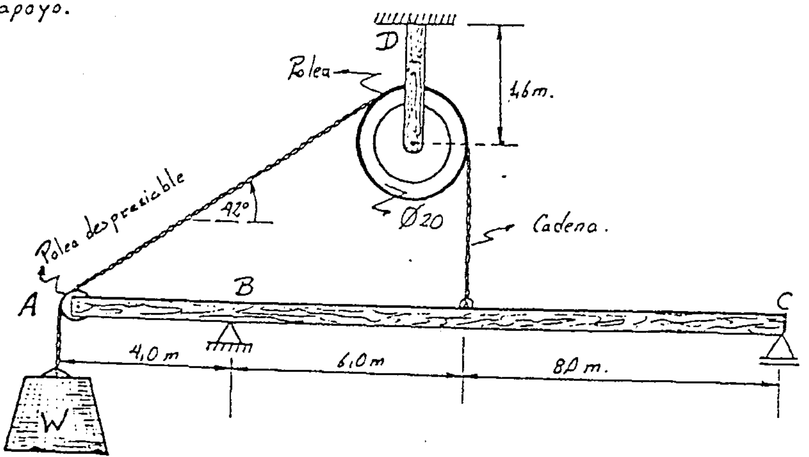


11.- Si $a = 8\,m$; $w = 20\ [KN/m]$ Calcular $L = f(x)$. Además de las reacciones máximas en A y B para $X = Y$.

12.- Encontrar las reacciones de apoyo de la fig (*) para $q = 3$.

fig (*)

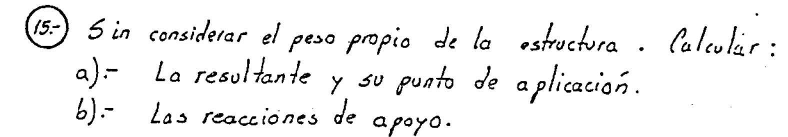
13.- El peso $W = 20t$ es suspendida conforme indica la fig. Considerando el peso propio de la viga ABC = 12 [KN/m]. Calcular las reacciones de apoyo.



14.- La placa rectangular mostrado en la figura se mantiene en equilibrio, por medio de la fuerza horizontal "F".

Si W es el peso de la placa. Demostrar que :

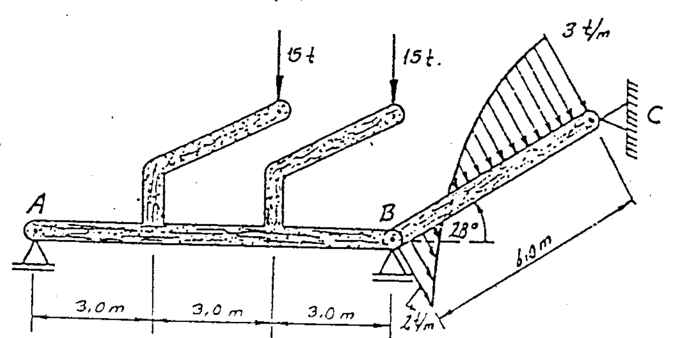
$$F = \frac{(b \cdot \cos\alpha - h\,\mathrm{Sen}\,\alpha)}{2 * (h \cos\alpha + b\,\mathrm{Sen}\,\alpha)} * W$$



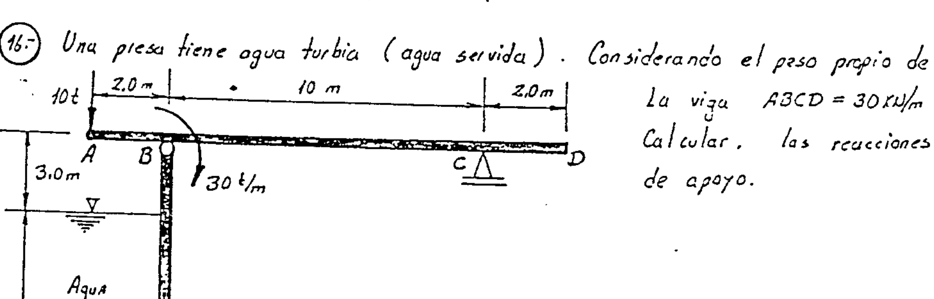
15.- Sin considerar el peso propio de la estructura. Calcular:

a).- La resultante y su punto de aplicación.

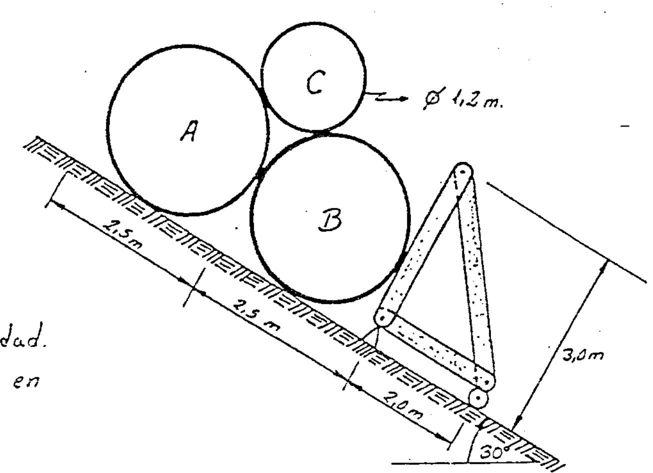
b).- Las reacciones de apoyo.



16.- Una presa tiene agua turbia (agua servida). Considerando el peso propio de la viga ABCD = 30 KN/m Calcular, las reacciones de apoyo.



17.- Los rodillos A y B son iguales tiene una longitud de 2 m y estan hechos de metal cuya densidad es 14 slug/pie^3, el cilindo C tiene 1,8 m de longitud y 18 sulg/pie^3 de densidad. Calcular las tensiones en cada barra.

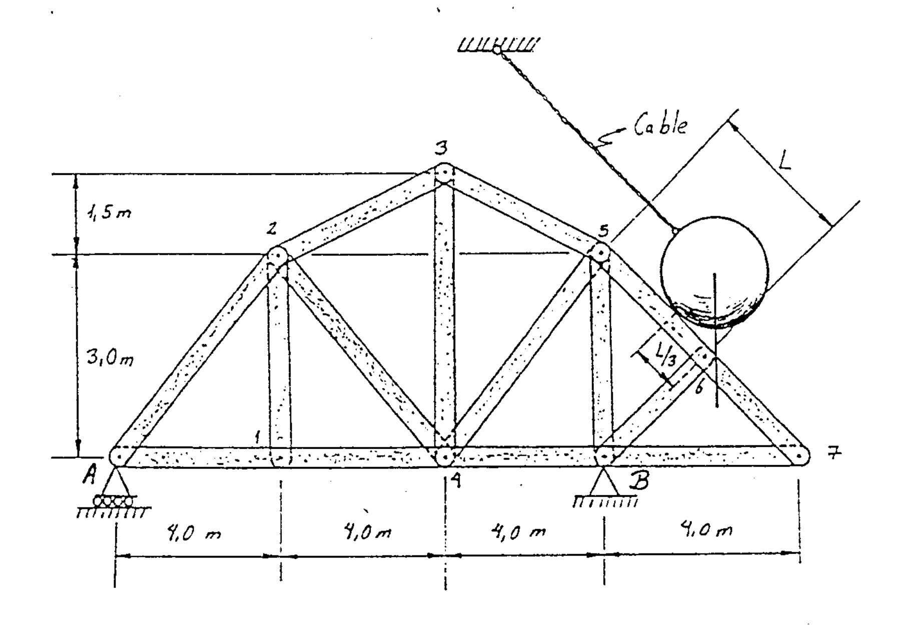


18.- Una esfera de peso $W = 12t$ se encuentra apoyado, conforme indica la fig. Calcular:

a):- La tensión en el cable

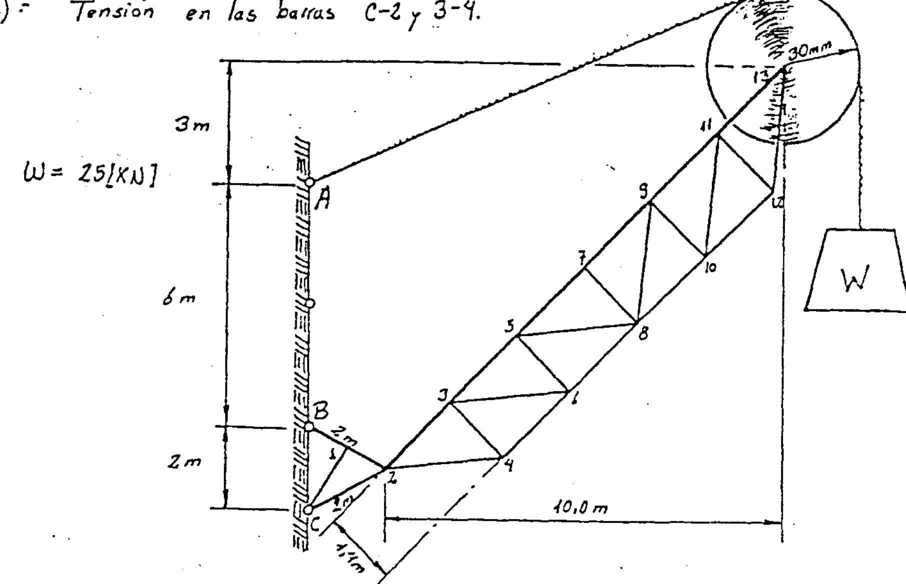
b):- Las reacciones de apoyo

c):- La tensión en las barras 5-6, 6-B, y A-1

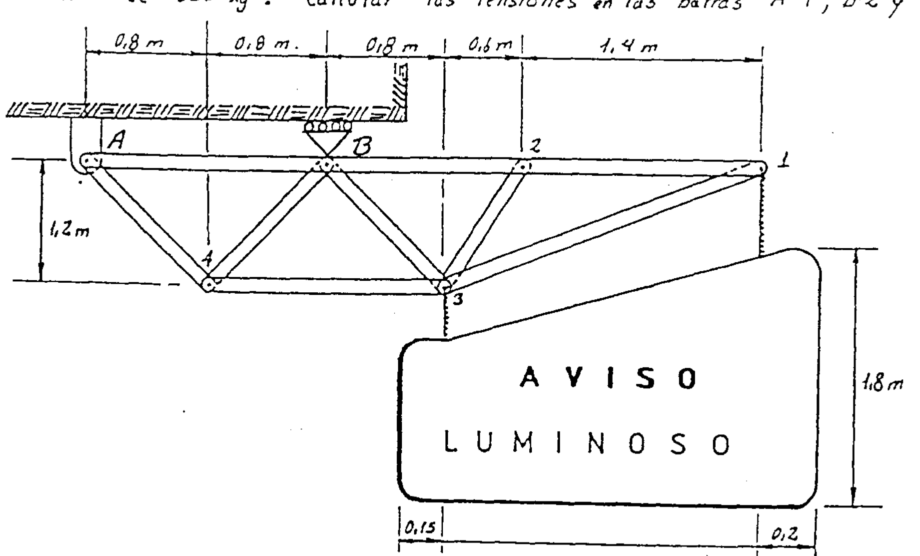


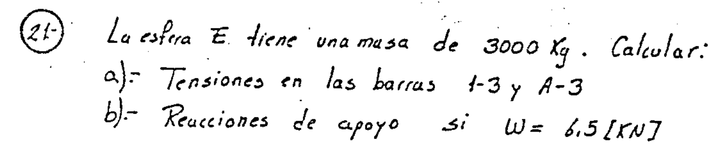
19: En la sigte estructura. calcular:

a).- Reacciones de apoyo.
b).- Tensión en el cable.
c).- Tensión en las barras C-2 y 3-4.



20: Un aviso luminoso está suspendido en los nudos 1 y 3, siendo la masa total de 650 Kg. Calcular las tensiones en las barras A-4, B-2 y 4-3.

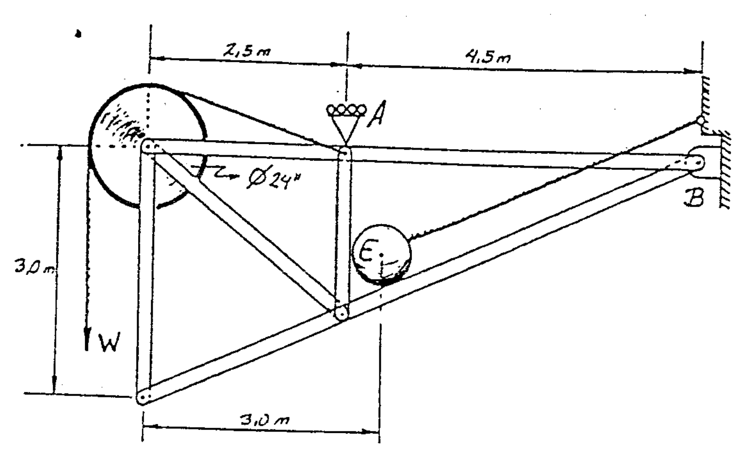




(21)- La esfera E tiene una masa de 3000 Kg. Calcular:

a)- Tensiones en las barras 1-3 y A-3

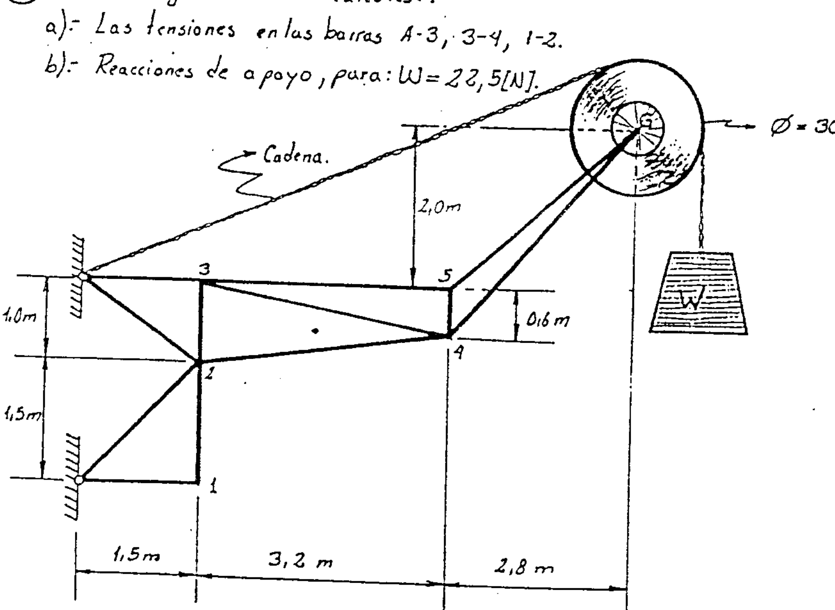
b)- Reacciones de apoyo si W = 6,5 [KN]



(22)- En la sigte estructura. Calcúlese:

a)- Las tensiones en las barras A-3, 3-4, 1-2.

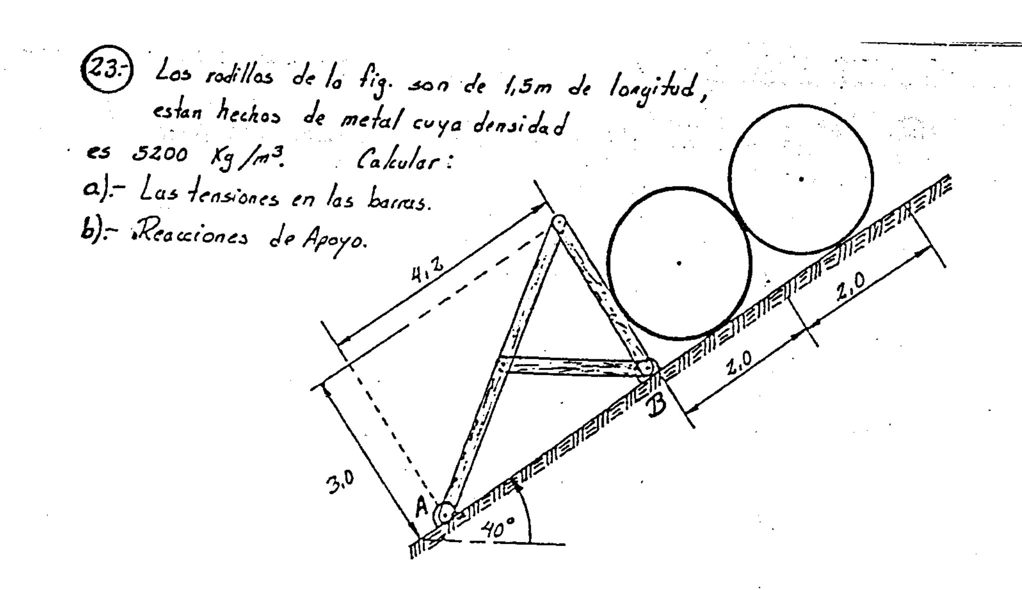
b)- Reacciones de apoyo, para: W = 22,5 [N].



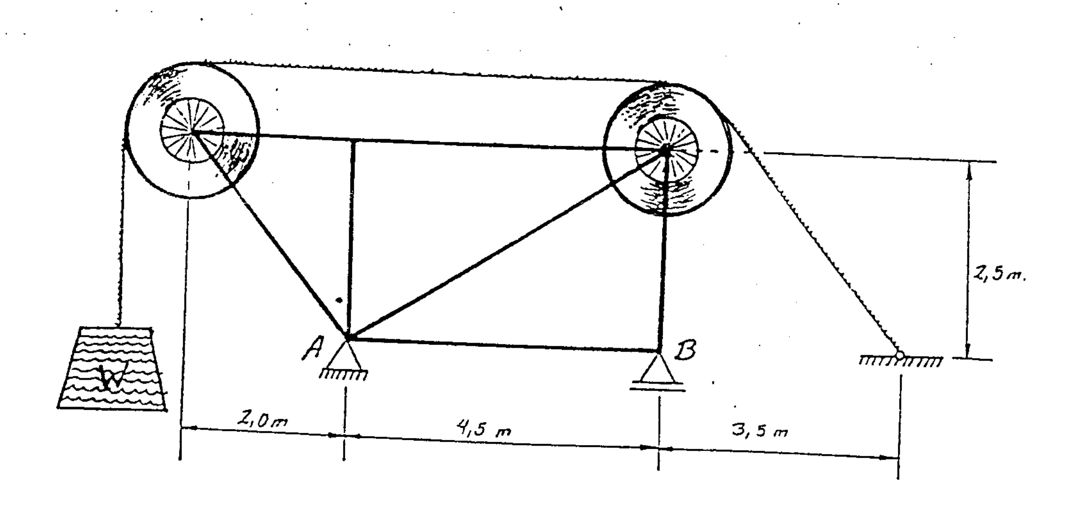
(23.-) Los rodillos de la fig. son de 1,5m de longitud, estan hechos de metal cuya densidad es 5200 Kg/m³. Calcular:

a).- Las tensiones en las barras.

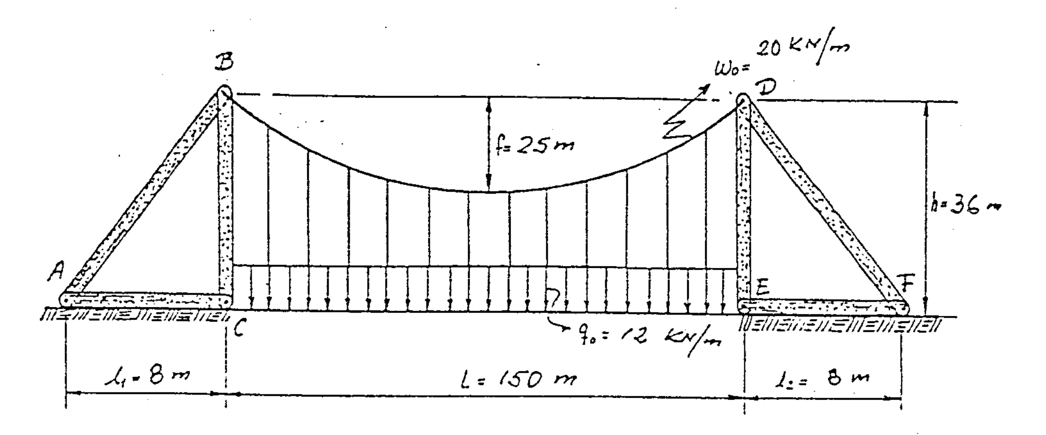
b).- Reacciones de Apoyo.



(24.-) En la estructura reticulada. Calcular las tensiones en las barras. Si W W= 150 lb y las poleas tienen Ø = 24".

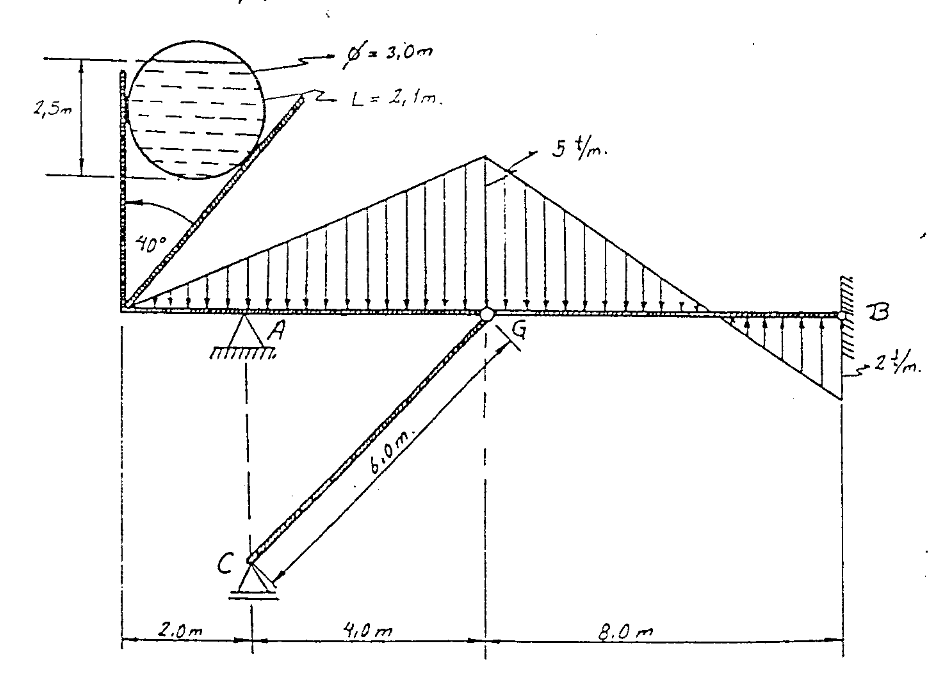


(25:) Según los datos del puente colgante. Calcular las tensiones en las barras A-B y B-C.

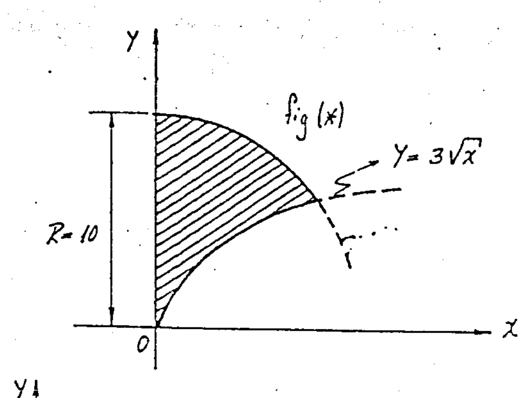


(26:) Un tanque con aceite de $\gamma = 1{,}4\ t/m^3$ se apoya conforme indica la figura. Considerar el peso propio de la viga. CG = 16 KN/m. Calcular:

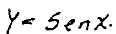
a).- Reacciones de apoyo.



27.- Por integración encontrar el "Cg" (centro de gravedad) de la fig (*) sombreada.



28.- Calcular el centroide del alambre doblado que se ajusta a la sigte expresión:

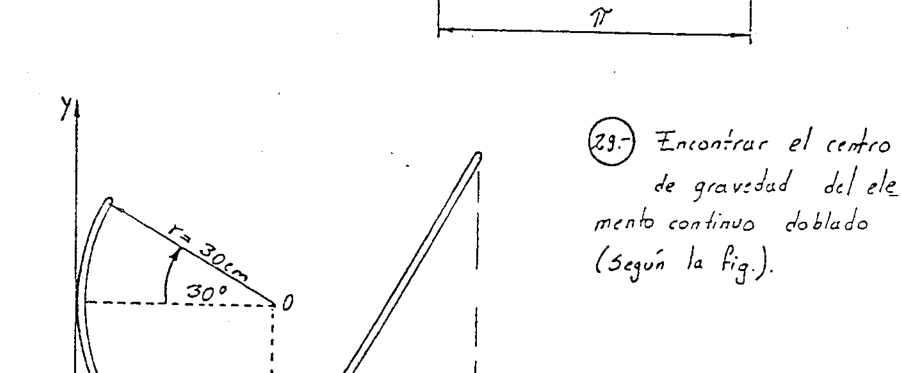


Y

Y = Sen (x)

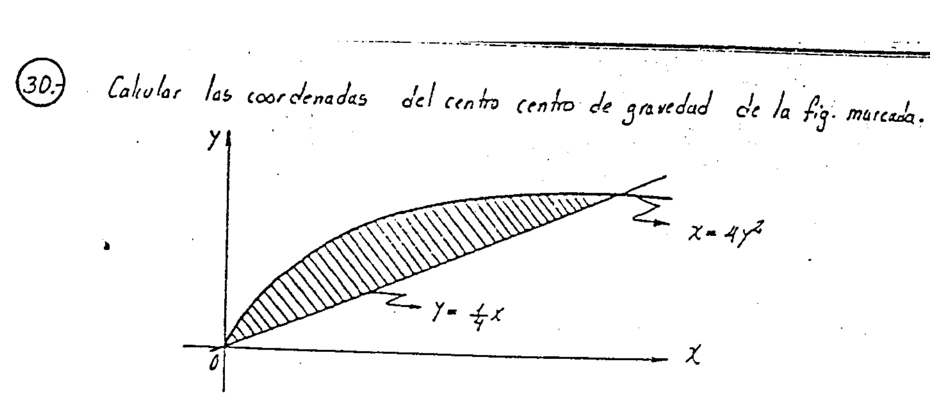
X

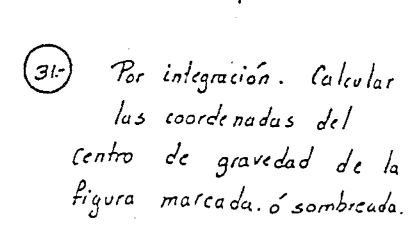
π



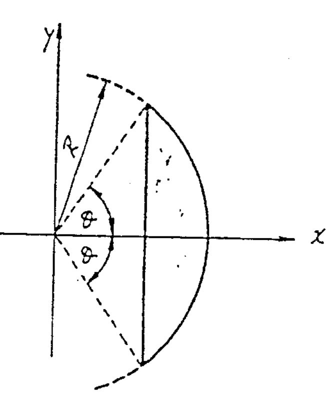
29.- Encontrar el centro de gravedad del elemento continuo doblado (Según la fig.).

30.- Calcular las coordenadas del centro centro de gravedad de la fig. marcada.

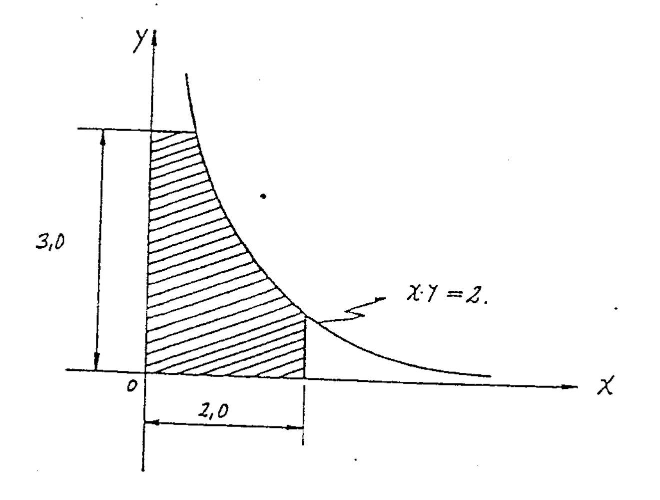




31.- Por integración. Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la figura marcada. ó sombreada.



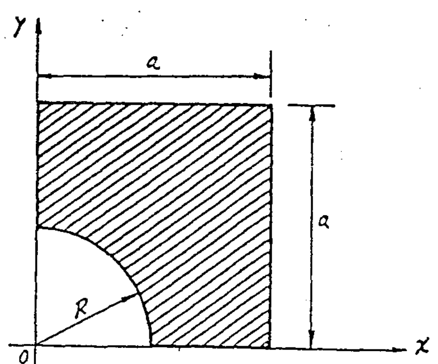
32.- Encontrar los momentos de inercia I_x, I_y de la figura indicada.



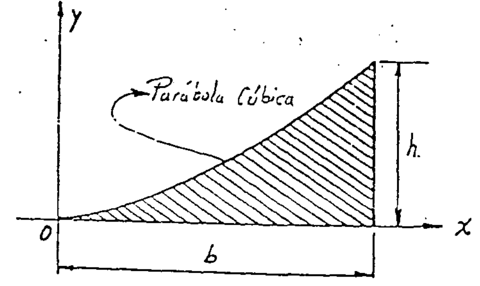
(33.-) Calcular el volumen generado por la intersección de las curvas $by = x^2$; $y = 4+x$; cuando gira alrededor de la recta $y = 4+x$; esto da una vuelta completa.

(34.-) Calcular el volumen generado por la superficie producida por la intersección de las curvas: $y = \frac{1}{4}x^2$; $y = 3+x$ cuando gira 3/4 de vuelta alrededor de la recta mencionada.

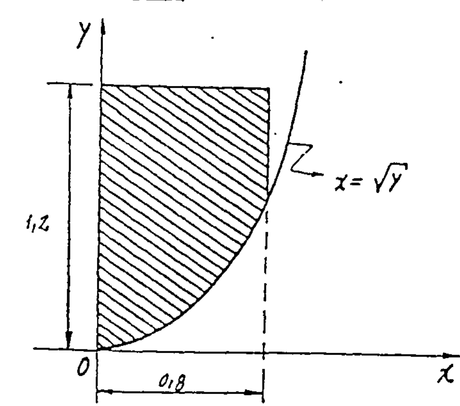
(35.-) Hallar el producto de inercia I_{xy} del área sombreada. de la sigte figura.



(36.-) Determinar el producto de inercia I_{xy} del área sombreada, respecto a los ejes x-y.



(37.-) Para la área sombreada hallar el momento polar de inercia (ref. fig (**)).

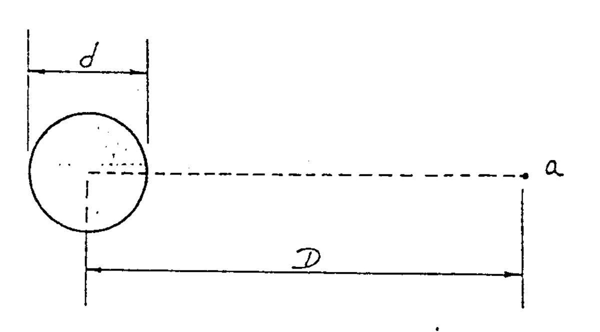


38.- Calcular el momento Polar de Inercia con respecto al punto P.

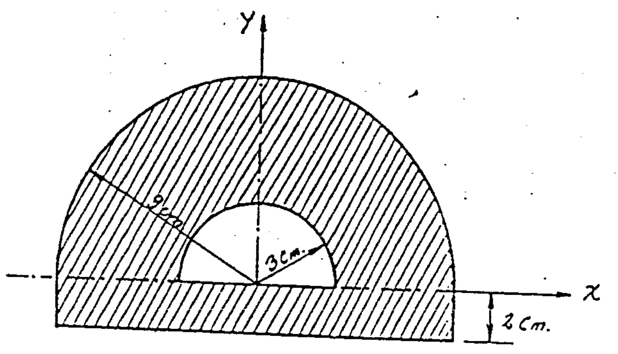
39.- Hallar los momentos de inercia inercia con respecto a los ejes que pasan por su centro de gravedad de la figura indicada.

40.- Si el diametro "d" del área es pequeño con respecto a "D". Demostrar que el momento Polar de inercia con respecto a "a" es:

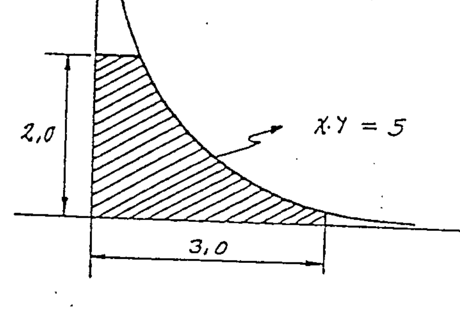
$$I_a = \frac{\pi d^2}{4} \cdot D^2$$



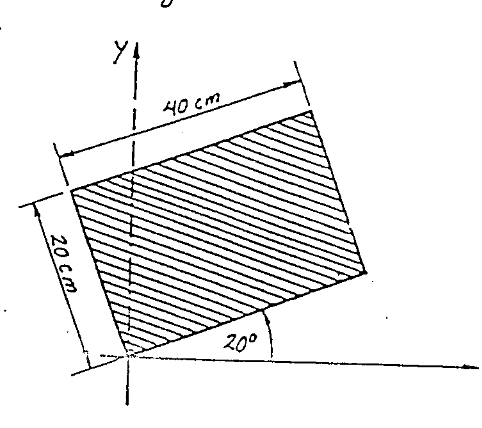
41.- En la siguiente figura: Calcular el radio de giro, respecto al eje x (K_x).



42.- Calcular el radio de giro respecto al eje x (K_x) de la figura sombreada.



43.- Calcular el radio de giro K_x y K_y, respecto al eje inclinado (u, u).



13 SISTEMAS DE FUERZAS TRIDIMENCIONALES

13.1 INTRODUCCION.-

En anteriores capítulos todos los problemas fuerón considerados como sistema de fuerzas coplanares (bidimensionales).

En este tipo de sistemas tanto la estructura como las cargas se localizan en un plano común.

Los requisitos generales de equilibrio para dicho sistema es que la sumatoria de las fuerzas a lo largo de las dos direcciones perpendiculares en el plano sea CERO, y que la sumatoria de los momentos con respecto a cualquier eje normal al plano sea también CERO ; vale decir:

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad ; \quad +\uparrow \sum F_Y = 0 \quad ; \quad \circlearrowleft + \sum M = 0$$

A partir de la consideración de los requisitos de equilibrio del sistema de fuerzas en dos dimensiones, puede concluirse que un máximo de tres efectos de fuerzas reactivas desconocidas puede encontrarse a partir de cada diagrama de cuerpo libre.

En este capítulo, se concidera el problema del sistema de fuerzas en tres dimensiones. En dicho sistema, ya sea la estructura física o las cargas, ó ambas a la vez, no se localizan en un plano común ; dicho sistema no requiere de una nueva teoría para su solución; más bien, los resultados obtenidos anteriormente para el caso de dos dimenciones puede generalizarse para incluir los efectos de una tercera coordenada (z)

Para introducirnos a este campo tridimencional, es necesario revisar ó recordar los teoremas del algebra vectorial, por lo tanto desarrollaremos algunos conceptos basicos sobre el tema.

13.2 ELEMENTOS DE ANALISIS VECTORIAL.-

El analisis vectorial es una forma sistemática de manejar operaciones con cantidades vectoriales. Su uso no constituye una teoria nueva, más bien, estas tecnicas proporcionan un número limitado de reglas operacionales.

Estos métodos de analisis vectorial reducen enormemente la necesidad de conceptualización detallado de relaciones espaciales en problemas de la ESTATICA, particularmente en el caso de sistemas de fuerzas o momento en tres dimensiones.

13.3 VECTOR UNITARIO.-

La siguiente figura indica un sistema de tres fuerzas llamadas "Vectores unitarios". Generalmente estan designados por $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ y sus direcciones estan ubicados a lo largo de los ejes X, Y, Z respectivamente.

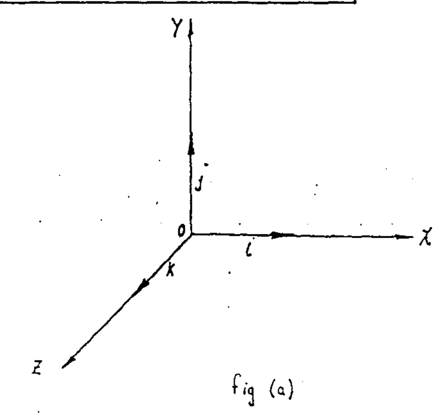


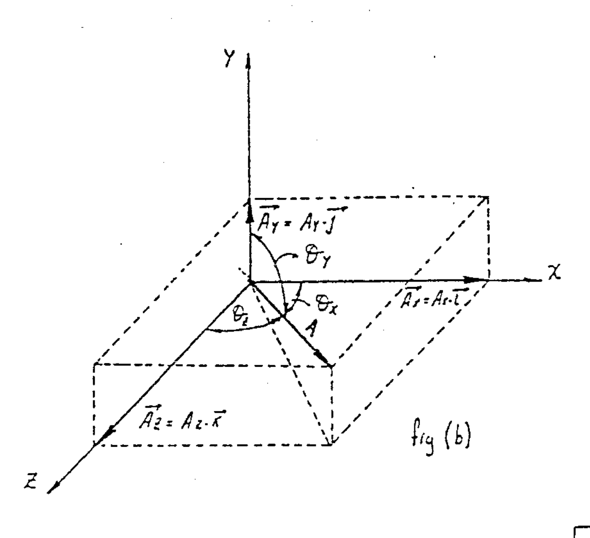
fig (a)

Cada una tiene una magnitud igual a la UNIDAD, y es positivo en el sentido positivo del sistema rectangular de ejes cartecianos.

13.4 EXPRESION DE UN VECTOR COMO FUNCION DE LOS VECTORES UNITARIOS.

A continuación se mostrará como cualquier vector puede expresarse en función de estos tres vectores unitarios.

Así por ejemplo el vector A (en forma general) según la fig (b) se puede expresar en función de los componentes rectangulares a lo largo de los ejes X, Y, Z, como sigue:



$$\vec{A} = \vec{A_X} + \vec{A_Y} + \vec{A_Z} \quad \ldots\ldots (13,1)$$

donde: $\vec{A_X}$; $\vec{A_Y}$, $\vec{A_Z}$ son componentes rectangulares del vector $\vec{A}$.

Basados en la definición de la multiplicación de un escalar con una cantidad vectorial, el vector $\vec{A}$ puede expresarse como:

$$\boxed{\vec{A} = A_X \cdot \vec{I} + A_Y \cdot \vec{J} + A_Z \cdot \vec{K}}$$

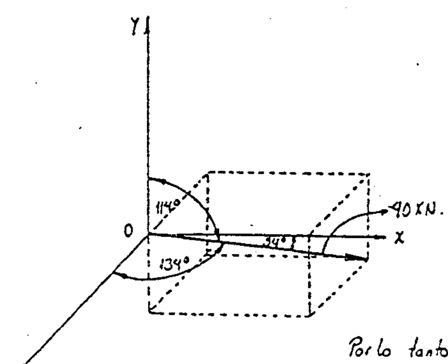
En las anteriores ecuaciones los tres vectores unitarios describen las direcciones de las componentes de $\vec{A}$ y establecen así la naturaleza vectorial, de este término. Los coeficientes escalares A_X, A_Y y A_Z definen la magnitud de estas componentes y los sentidos se determinan por el sentido positivo ó negativo de tales coeficientes.

13.5 DIRECCION VECTORIAL.- Según la fig(b) la dirección de $\vec{A}$ está dada por los tres angulos directores θ_X, θ_Y y θ_Z respectivamente, los mismos se expresan como sigue:

$$\boxed{A_X = A \cos\theta_X} \quad ; \quad \boxed{A_Y = A \cdot \cos\theta_Y} \quad ; \quad \boxed{A_Z = A \cdot \cos\theta_Z}$$

Los angulos directores siempre se miden a partir de los ejes coordenados positivos, estos ángulos tienen valores comprendidos entre 0° y 180°.

Ejemplo N. 1 . Expresar la fuerza indicada según la figura. en función de los vectores unitarios.



Apliquemos las ecuaciones anteriores.

$A_x = 40 \cdot \cos 54° \Rightarrow A_x = 23{,}51\ KN$

$A_Y = 40 \cos 114° \Rightarrow A_Y = -16{,}27\ KN$

$A_z = 40 \cdot \cos 134° \Rightarrow A_z = -27{,}79\ KN$

Por lo tanto expresando los anteriores en función de los vectores unitarios, se tiene:

$$\vec{A} = 23{,}51\,\vec{i} - 16{,}27\,\vec{j} - 27{,}79\,\vec{k} \quad [KN]$$

13,6 MAGNITUD DE UN VECTOR .-

Si se toma la ecuación de los cosenos directores y se elevan al cuadrado ambos miembros y se suman se demuestra que:

$$A = |\vec{A}| \quad ; \quad A = \sqrt{A_x^2 + A_Y^2 + A_z^2} \quad \ldots\ldots (c)$$

13,7 ADICION VECTORIAL .-

Si consideramos un segundo vector definido por:

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_Y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

Entonces la suma vectorial será: otro vector $\vec{C}$ donde sus componentes serán la suma de las componentes de la forma:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = C_x\vec{i} + C_Y\vec{j} + C_z\vec{k}$$

si tenemos lo sigte: $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

Entonces: $\vec{C} = (A_x i + A_y j + A_z k) + (B_x i + B_y j + B_z k)$

$$\boxed{\vec{C} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j} + (B_z + A_z)\vec{k}} \quad \ldots\ldots(d)$$

Ejemplo N.2: Sumar las siguientes fuerzas usando el método de la adición vectorial estas fuerzas son:

$F_1 = 2200j$; $F_2 = 1760i + 1670j + 935k$.

$F_3 = 3000i + 0j + 0k$; $F_4 = -875j + 1520k$

$F_5 = 3400k$.

La fuerza resultante (F) debe estar expresado de la sigte manera.

$$F = F_x i + F_y j + F_z k.$$

Entonces: $F = (0 + 1760 + 3000 + 0 + 0)\vec{i} + (2200 + 0 + 1760 + (-875) + 0)j + (0 + 0 + 935 + 1520 + 3400)\vec{k}$

ó $\boxed{F = 4760\vec{i} + 3085\vec{j} + 5855\vec{k}}$ [Resultante]

Donde las componentes rectangulares són: $F_x = 4760$; $F_y = 3085$; $F_z = 5855$

13.8 PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES.- Denominado también producto PUNTO ó INTERNO; en la teoría de operaciones vectoriales existen dos tipos diferentes de multiplicación vectorial, la primera operación a considerar se denomina. PRODUCTO ESCALAR ó PRODUCTO PUNTO ó PRODUCTO INTERNO. si consideramos por ejemplo lo sigte (fig en sigte page).

Cont.

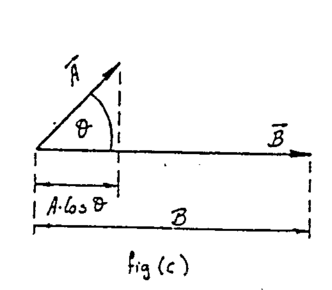


fig (c)

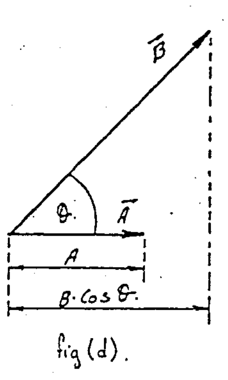


fig (d).

En la figura anterior si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son dos vectores, entonces el producto escalar C está definido por:

$$C = \vec{A} \circ \vec{B} = \vec{B} \circ \vec{A} = A \cdot B \cdot \cos\theta. \qquad \text{...... (e)}$$

En esta ecuación θ es el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ (Según indica la fig(c,d)) A; B son las magnitudes ó módulos escalares de estos vectores, y el <u>producto punto</u> es una cantidad <u>escalar</u>. Tambien se demuestra que la operación de este producto PUNTO es Conmutativa. ; osea:

$$C = A \circ B = B \circ A = A \cdot (B \cos\theta) = B(A \cos\theta) \qquad \text{...... (f)}$$

En efecto está indicada en las figuras (c) y (d) la interpretación del producto escalar de dos VECTORES, Consiste en que uno de ellos se proyecta sobre la dirección del otro vector.

Entonces el producto de esta longitud proyectada por la magnitud del segundo vector es el resultado del producto escalar. Los signos dependen de la posición de de los vectores en el sistema de ejes cartecianos osea en la ubicación del vector en los cuadrantes.

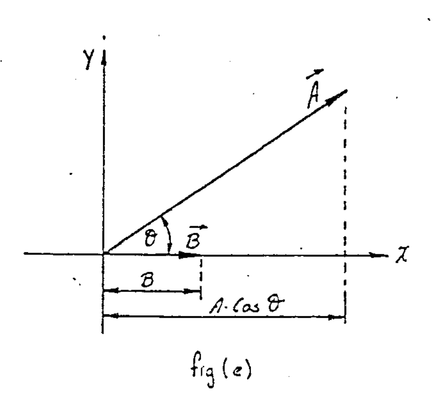


fig (e)

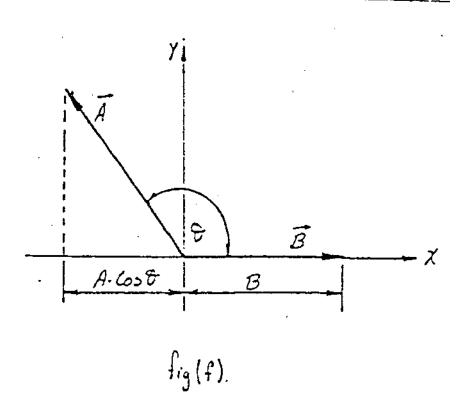


fig (f).

Según la fig (e) y (f) el vector $\vec{B}$ es colineal con el eje X, por lo tanto positivo en el sentido positivo de este eje :, si el vector $\vec{A}$ se localiza en la región positiva. o sea. $-90° < \theta < +90°$ Como se indica en la fig (e) entonces el producto escalar será POSITIVO ; se el ángulo varia: $90° < \theta < 270°$ el producto será negativo.

Usando las formas generales de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ el producto escalar puede escribirse como:

$$C = \vec{A} \circ \vec{B}$$

osea:
$$C = (A_x i + A_y j + A_z k) \circ (B_x i + B_y j + B_z k)$$

de modo que:
$$C = A_x \cdot B_x \, i \cdot i + A_x \cdot B_y \, i \cdot j + A_x \cdot B_z \cdot i \cdot k + A_y \cdot B_x \, j \cdot i + A_y \cdot B_y \, j \cdot j + A_y \cdot B_z \, j \cdot k + A_z \cdot B_x \, k \cdot i + A_z \cdot B_y \, k \cdot j + A_z \cdot B_z \cdot k \cdot k$$

Existen nueve combinaciones, osea el producto del polinomio indicado:

Ademas sabemos por definición: $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0° = 1$

$$y: \quad i \cdot j = i \cdot k = j \cdot i = j \cdot k = k \cdot i = k \cdot j = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90° = 0$$

Considerando lo anterior se llega a la sigte expresión.

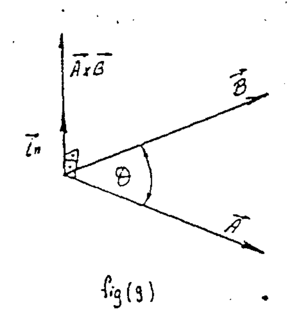
$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z} \quad \ldots\ldots (9)$$

Existe un caso especial si $\vec{A} \circ \vec{B} = 0$; significaria que A ó B sea igual a cero o en todo caso anbos sean ortogonales osea vectores perpendiculares esto ocurre si $\theta = 90°$ entonces $\cos 90° = 0$.

13.9 PRODUCTO VECTORIAL.- Denominado tambien Producto CRUZ ó EXTERNO es el segundo tipo de multiplicación vectorial se llama producto CRUZ ó producto exterior que consiste en:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (A \cdot B \cdot \operatorname{Sen} \theta)\vec{i_n}$$

donde: A y B son las magnitudes de los vectores y θ es el ángulo entre sus direcciones $\vec{i_n}$ un vector unitario normal al plano formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$ por lo tanto: "El resultado de la multiplicación del PRODUCTO CRUZ es un VECTOR" a diferencia del producto escalar; graficamente podemos representar de la sigte manera:



fig(g)

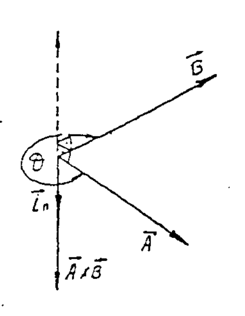


fig (h)

Al efectuar la operación del producto vectorial, es necesario imaginar que el vector A gira hacia B en el plano formado por éstos ; (el observador se coloca mirando la dirección i_n, por lo tanto "Gira según las manecillas del reloj" por lo tanto es positivo)

El producto CRUZ DE los Vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ puede expresarse como:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (Ax\,i + Ay\,j + Az\,k) \times (Bx\,i + By\,j + Bz\,k) \qquad \dots (h)$$

El desarrollo de la multiplicación anterior nos dará un producto de vectores direccionales de la forma.

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{K}\times\vec{K} = 1\cdot1\cdot \operatorname{Sen} 0^\circ \cdot \vec{K} = 0$$

$$i\times\vec{j} = j\times K = K\times i = 1\cdot1\cdot\operatorname{Sen}90^\circ \begin{Bmatrix} K \\ i \\ j \end{Bmatrix} = \vec{K} = i = j$$

$$i\times K = K\times j = j\times i = 1\cdot1\cdot\operatorname{Sen}90\cdot \begin{Bmatrix} -j \\ -i \\ -K \end{Bmatrix} = -\vec{j} = -\vec{i} = -\vec{K}$$

Reemplazando estos valores en el desarrollo de la ecuación (h) obtendremos:

$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B} = (A_Y\cdot B_Z - A_Z B_Y)\vec{i} + (A_Z\cdot B_X - A_X\cdot B_Z)j + (A_X B_Y - A_Y\cdot B_X)K.} \quad \ldots\ldots (i)$$

Para el mejor uso de este producto conviene llevar a un determinante de la forma:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & K \\ A_X & A_Y & A_Z \\ B_X & B_Y & B_Z \end{vmatrix}$$

Tomando en cuenta los signos de los menores de este determinante se resuelve.

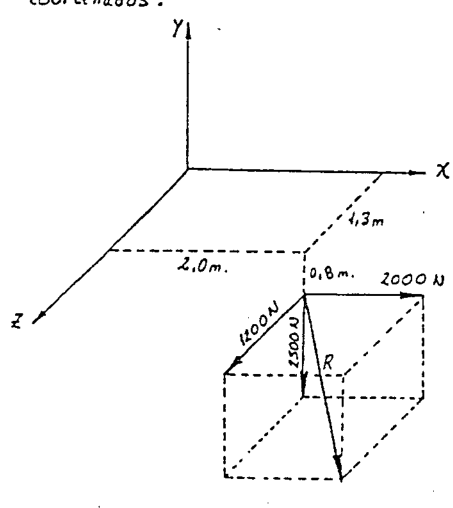
NOTA : A diferencia del producto punto, el producto cruz de vectores no es conmutativo, osea :

$$\vec{A}\times\vec{B} \neq \vec{B}\times\vec{A}. \quad \text{es Válido : } \vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$

La principal aplicación del producto vectorial en estática., consiste en encontrar el momento producido por una fuerza. con respecto a algún (generalmente el origen)

No olvidar. la definición del producto vectorial. y su desarrollo porque es muy importante.

Ejemplo No 3: Encontrar los momentos con respecto a los ejes x, y, z producido por la fuerza R según indica la figura. especificar la magnitud y dirección del momento resultante con respecto al origen del sistema de ejes coordenados.



El vector $\vec{r}$ de posición esta dada por:

$$\vec{r} = 2i - 0{,}8j + 1{,}3k$$

El vector R se escribe de la sigte manera exprezado por sus componentes.

$$\vec{R} = 2000i - 2500j + 1200k$$

Ahora apliquemos el producto vectorial de los vectores $\vec{r}$ y $\vec{R}$ para hallar el momento en O

$$M_o = \vec{r} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -0{,}8 & 1{,}3 \\ 2000 & -2500 & 1200 \end{vmatrix} = 2290i + 200j - 3400k$$

$$= (-0{,}8 \cdot 1200 + 1{,}3 \cdot 2500)i - (2 \cdot 1200 - 1{,}3 \cdot 2000)j + (2 \cdot (-2500) + 0{,}8 \cdot 2000)$$

$$\Rightarrow \vec{M}_o = 2290i + 200j - 3400k \quad [N \cdot m] = 2{,}29i + 0{,}2j - 3{,}4k \quad [KN \cdot m]$$

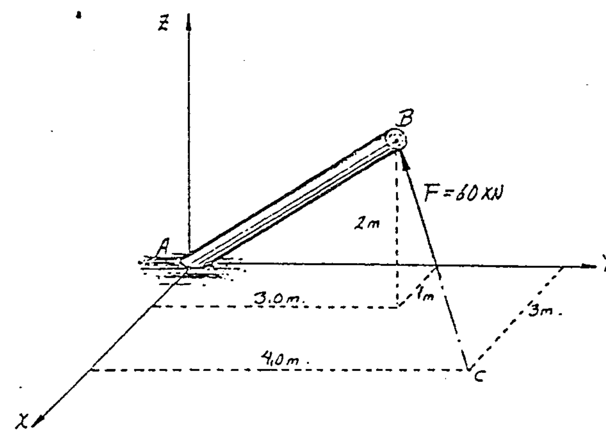
Por lo tanto las componentes serán:

$$\boxed{M_x = 2{,}29\ [KN \cdot m]}\ ; \quad \boxed{M_y = 0{,}2\ [KN \cdot m]}\ ; \quad \boxed{M_z = -3{,}4\ [KN \cdot m]}$$

Finalmente. la magnitud del M_o.

$$|M_o| = \sqrt{2{,}29^2 + 0{,}2^2 + (-3{,}4)^2} \Rightarrow \boxed{M_o = 4{,}104\ [KN \cdot m]}$$

Ejemplo No 4.- Sobre el poste de la figura, ejerce una fuerza de 60 KN que se dirige desde C hasta B. Determinar la magnitud del momento producido por esta fuerza con respecto al punto A.



Como podemos observar en la figura, hay 2 vectores posición:

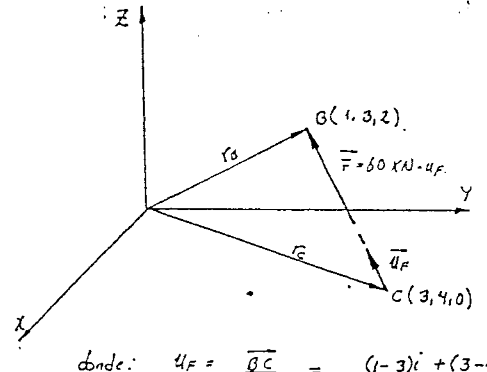
$\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$

Los mismos serán:

$\vec{r}_C = 3i + 4j + 0k$

$\vec{r}_B = 1i + 3j + 2k$

* Por lo tanto el producto vectorial del vector fuerza con cualquiera de estos vectores posición nos llevará a la misma solución o resultado. $M_A = \vec{r}_C \times \vec{F}$ ó $M_A = \vec{r}_B \times \vec{F}$



La fuerza F de 60 KN de magnitud, tiene una dirección especificada por el vector unitario $\vec{u}_F$ dirigido de C a B.

Por lo que: $\vec{F} = F \cdot \vec{u}_F = 60 \cdot \vec{u}_F$

donde: $u_F = \dfrac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{(1-3)i + (3-4)j + (2-0)k}{\sqrt{(1-3)^2 + (3-4)^2 + (2-0)^2}} \Rightarrow \boxed{u_F = -\frac{2}{3}i - \frac{1}{3}j + \frac{2}{3}k}$

Por lo tanto: $\vec{F} = F \cdot \vec{u}_F = 60 \cdot \left(-\frac{2}{3}i - \frac{1}{3}j + \frac{2}{3}k\right) \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -40i - 20j + 40k}$ [KN]

Entonces:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_B \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ -40 & -20 & 40 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{M}_A = 160i - 120j + 100\vec{k}} \text{ [KN·m]}$$

$$\therefore \boxed{M_A = 100\sqrt{5} = 223,61 \text{ [KN·m]}}$$

13.10 DIRECCION DE LA FUERZA O MOMENTO EN EL ESPACIO TRIDIMENCIONAL-

Hay dos formas generales de definir la dirección de la linea de acción de una fuerza ó momento en el espacio tridimencional las cuales son:

a): Mediante cosenos directores, que consiste en especificar mediante ángulos directores a la recta de acción según muestra la sigte figura.

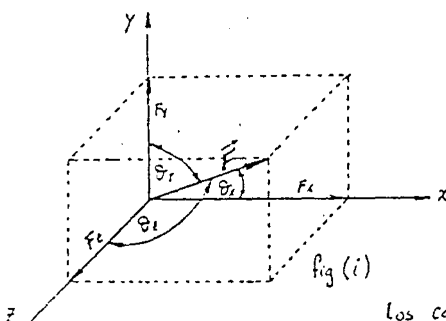


fig (1)

En esta figura. F es la fuerza indicada en tres dimensiones X,Y,Z cuyos ángulos θ_x, θ_Y, θ_z son los llamados ángulos directores que estos comprenden entre la recta de acción de F y los ejes del sistema coordenado.

Los cosenos directores deben cumplir lo siguiente:

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_Y + \cos^2\theta_z = 1 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Además: $F_x = F\cdot\cos\theta_x$; $F_Y = F\cdot\cos\theta_Y$; $F_z = F\cdot\cos\theta_z$ .... (2)

su magnitud estará dada por: $F = \sqrt{F_x^2 + F_Y^2 + F_z^2}$ ..... (3)

b).- Mediante ángulos con respecto a planos de referencia.; Una segunda forma para definir la dirección de la recta de acción de una fuerza o de un momento en el espacio, es mediante el uso de los angulos con respecto a planos de referencia., según indica la figura. (3)

En la figura (3) el ángulo α mide la posición del plano que contiene la fuerza o el momento y el eje "y"; mientras que β mide el ángulo de la fuerza. F con referencia al plano formado por YXZ.

b) Método usando ángulos con respecto a planos.

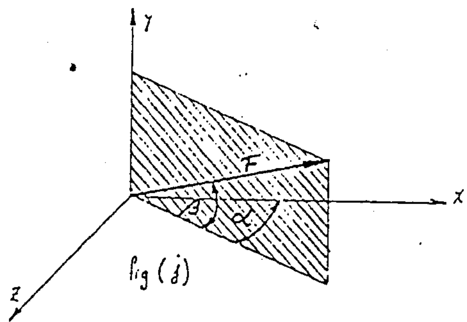


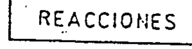
fig (j)

13,11 APOYOS TRIDIMENCIONALES:-

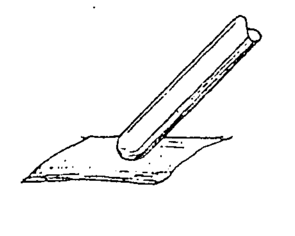
En capítulos anteriores se representarón apoyos en dos dimenciones o las formas de como un cuerpo puede conectarse físicamente a otro cuerpo mayor.

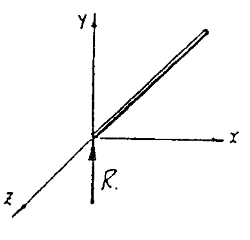
Los métodos de apoyos para el caso del espacio tridimencional, junto con una descripsión de los efectos de las fuerzas reactivas, se muestran a continuación:

TIPO DE CONEXION

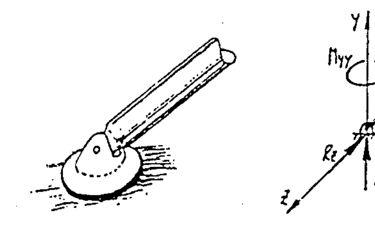


DESCRIPCION

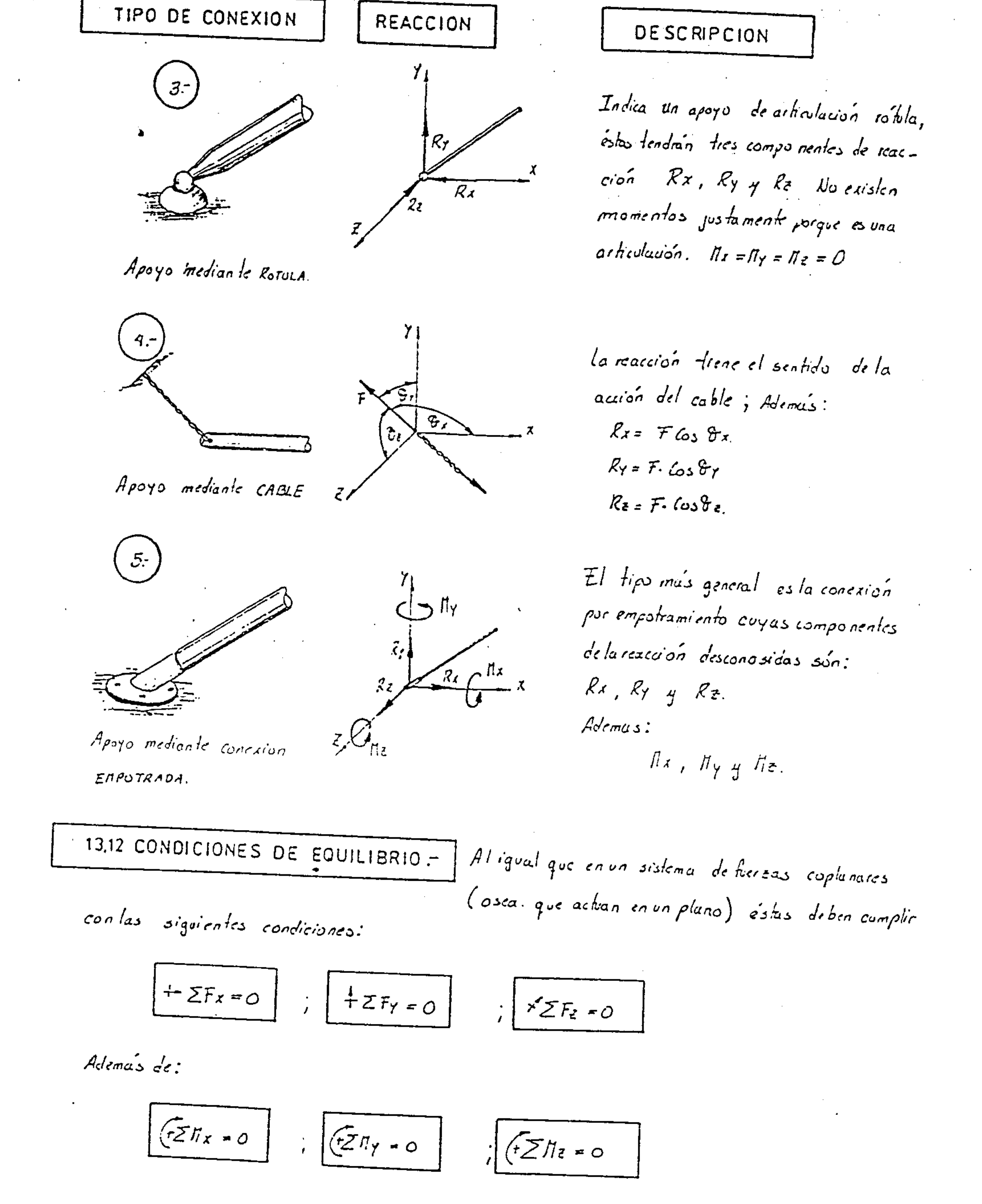




El cuerpo está en contacto con la sup. Lisa. la reacción R. tiene un sentido de compresión sobre el cuerpo, y una direc_ción normal normal al plano no puede transmitir momentos. $M_x = M_y = M_z = 0$.



indica un apoyo de articulación está contenido según el plano XY. las reacciones R_x, R_y, R_z son desconocidas Además de los momentos M_x y M_y solo se conoce $M_z = 0$



TIPO DE CONEXION	REACCION	DESCRIPCION
3.- Apoyo mediante ROTULA.		Indica un apoyo de articulación rótula, éstas tendrán tres componentes de reacción R_x, R_y y R_z. No existen momentos justamente porque es una articulación. $M_x = M_y = M_z = 0$
4.- Apoyo mediante CABLE		La reacción tiene el sentido de la acción del cable; Además: $R_x = F \cos \theta_x$. $R_y = F \cdot \cos \theta_y$ $R_z = F \cdot \cos \theta_z$.
5.- Apoyo mediante conexion EMPOTRADA.		El tipo más general es la conexión por empotramiento cuyas componentes de la reacción desconocidas són: R_x, R_y y R_z. Además: M_x, M_y y M_z.

13.12 CONDICIONES DE EQUILIBRIO.-

Al igual que en un sistema de fuerzas coplanares (osea. que actuan en un plano) éstas deben cumplir con las siguientes condiciones:

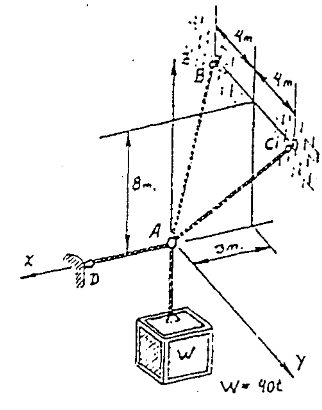
$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad \sum F_y = 0 \quad ; \quad \sum F_z = 0$$

Además de:

$$\sum M_x = 0 \quad ; \quad \sum M_y = 0 \quad ; \quad \sum M_z = 0$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1- Determinar la tension desarrollada en cada una de los cables utilizados para soportar la carga que se muestra en la figura.



1° Determinamos la ubicación donde los cables están sujetos:

$B(-3,-4,8)$; $C(-3,4,8)$; $D(?,0,0)$.

Sabemos que: $\vec{F}_B = F_B \cdot \vec{u}_B$; $\vec{F}_C = F_C \cdot \vec{u}_C$; $\vec{F}_D = F_D \cdot \vec{u}_D$

donde:

$$\vec{u}_B = \frac{-3i-4j+8k}{\sqrt{9+16+64}} = -0{,}318i - 0{,}424j + 0{,}848k$$

$$\vec{u}_C = \frac{-3i+4j+8k}{\sqrt{9+16+64}} = -0{,}318i + 0{,}424j + 0{,}848k$$

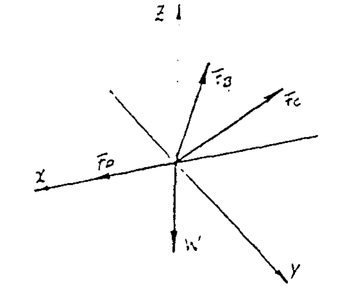
$$\vec{u}_D = 1 \cdot i + 0j + 0k$$

Por lo tanto:

$$\vec{F}_B = -0{,}318 F_B i - 0{,}424 F_B j + 0{,}848 F_B k$$

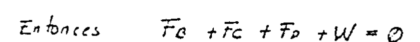
$$\vec{F}_C = -0{,}318 F_C i + 0{,}424 F_C j + 0{,}848 F_C k$$

$$\vec{F}_D = F_D i \qquad \text{además:} \quad W = -40\vec{k}$$

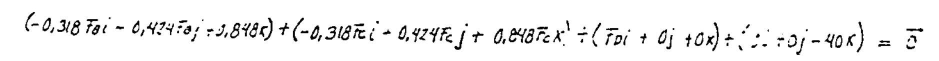


Para que la estructura esté en equilibrio es necesario que se cumpla:

$$\sum F_i = 0$$



Entonces $\quad F_B + F_C + F_D + W = 0$



$$(-0{,}318F_B i - 0{,}424F_B j + 0{,}848k) + (-0{,}318F_C i + 0{,}424F_C j + 0{,}848F_C k) + (F_D i + 0j + 0k) + (0i + 0j - 40k) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (-0{,}318F_B - 0{,}318F_C + F_D + 0)i + (-0{,}424F_B + 0{,}424F_C + 0 + 0)j + (0{,}848F_B + 0{,}848F_C + 0 - 40)k = \vec{0}$$

O sea: igualando los vectores tenemos:

$$\Sigma F_x = 0; \quad -0{,}318\,F_B - 0{,}318\,F_C + F_D = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$
$$\Sigma F_y = 0 \quad -0{,}424\,F_B + 0{,}424\,F_C = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$
$$\Sigma F_z = 0 \quad 0{,}848\,F_B + 0{,}848\,F_C - 40 = 0 \quad \ldots\ldots (3).$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene:

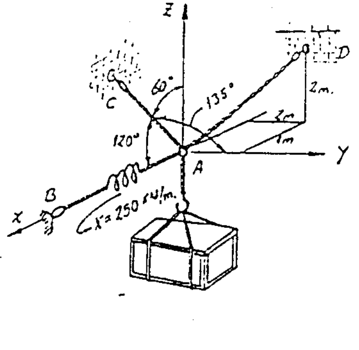
en (2) $F_B = F_C \Rightarrow$ en (3) $2 \cdot 0{,}848\,F_C = 40 \Rightarrow F_C = 23{,}585$ t.

F_C en (1) $\Rightarrow F_D = 2 * (0{,}318 * 23{,}585) \Rightarrow F_D = 15{,}0$ t.

Por lo tanto las reacciones en B, C, D son iguales a las tensiones

∴ $R_D = 15$ (t) ; $R_B = 23{,}585$ (t) ; $R_C = 23{,}585$ (t)

(2.-) La caja de 10000 Kg masa mostrada en la figura, es soportada mediante tres cables, una de las cuales esta conectada a un resorte. Determinar:



a).- Las tensiones en cada cable.

b).- Las reacciones de apoyo

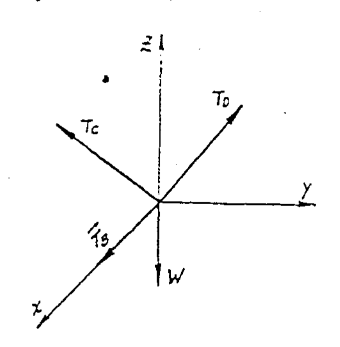
c).- El estiramiento del cable.

Sol'n.: si $W = m \cdot g \Rightarrow W = 9{,}81 * 10000 \quad [Kg \cdot m/s^2] = [N]$

$W = 98100 \quad [N]$

$W = 98{,}10 \; [KN]$

Diagrama de cuerpo libre:



Conocemos la siguiente coordenada

D (-1, 2, 2) entonces:

$$u_D = \frac{-i+2j+2k}{\sqrt{1+4+4}} \Rightarrow \vec{u}_D = -\frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{2}{3}k$$

Por lo tanto tenemos la fuerza $\vec{F}_D = T_D \cdot \vec{u}_D$

$$T_D = -0{,}333\, T_D i + 0{,}667\, T_D j + 0{,}667\, T_D k \quad \ldots\ldots (1)$$

si: $\vec{u}_B = 1 \cdot i + 0j + 0\vec{k} \Rightarrow \vec{T}_B = T_B i + 0j + 0k \quad \ldots\ldots (2)$

Ahora lo que haremos es que $\vec{T}_C$ expresaremos según sus cosenos directores, se conoce θ,

Entonces: $\vec{T}_C = T_C \cos 120° i + T_C \cdot \cos 135° j + T_C \cdot \cos 60° K$.

$$\vec{T}_C = -0{,}50\, T_C i - 0{,}707\, T_C j + 0{,}50\, T_C K. \quad \ldots\ldots (3)$$

Por condición de equilibrio se debe tener : $\Sigma F_i = 0$

$$T_B + T_C + T_D + W = 0 \qquad \text{donde } W = \omega \vec{k} = -98{,}1 K.$$

$$(T_B i + 0j + 0k) + (-0{,}50\, T_C i - 0{,}707\, T_C j + 0{,}50\, T_C k) + (-0{,}333\, T_D + 0{,}667\, T_D j + 0{,}667\, T_D k) + (-98{,}1 k) = \vec{0}$$

o sea:

$$\Sigma F_x = 0 \;;\quad T_B - 0{,}50\, T_C - 0{,}333\, T_D = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$
$$\Sigma F_y = 0 \;;\quad -0{,}707\, T_C + 0{,}667\, T_D = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$
$$\Sigma F_z = 0 \;;\quad 0{,}50\, T_C + 0{,}667\, T_D - 98{,}1 = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

Resolviendo el sistema de las 3 ecuaciones con 3 incógnitas se tiene:

Por lo tanto: $T_B = 69{,}326$ [KN] ; $T_C = 81{,}276$ [KN] ; $T_D = 86{,}150$ [KN]

Como son cables las reacciones serán iguales a las tensiones de los cables correspondientes.

Por lo tanto: $R_A = 69.326$ [KN] Resp. del inciso b).

$R_C = 81,276$ [KN]

$R_D = 86.150$ [KN]

Recuerde que las reacciones son opuestos a la acción de la tensión o tensiones.

Para resp. del inciso c) Estiramiento del resorte como dato el coeficiente de restitución $K = 250,0$ KN/m.

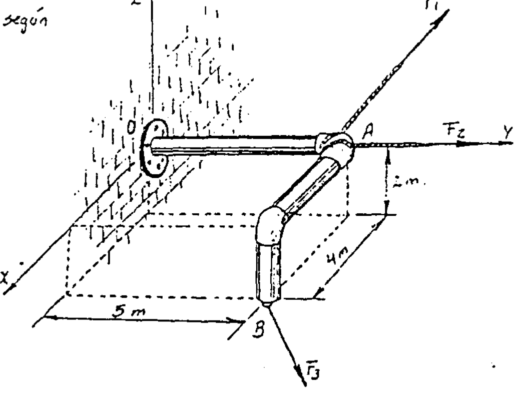
Por la ley de Hooke se sabe que: $F = K \cdot S$ donde: $F = T_C$
S = el incremento de long.

Entonces: $69,326 = 250 \cdot S \Rightarrow S = 0,277$ [m]

osea: el resorte se estira una longitud S ; $S = 27,7$ cm

③.- En la estructura metálica que sobresale de un edificio, actúan las fuerzas indicadas. Determinar:

a) El momento resultante con respecto al punto de empotramiento O
b) La dirección del eje de momentos.
c) Los momentos de empotramiento según los ejes X, Y, Z.



$\vec{F_1} = -60\vec{i} + 40\vec{j} + 20\vec{k}$ [KN]
$\vec{F_2} = 50\vec{j}$
$\vec{F_3} = 80\vec{i} + 40\vec{j} - 30\vec{k}$

Determinación de los vectores de posición que son $\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$

osea: $\vec{r}_A = 5j$ [m]
$\vec{r}_B = 4i + 5j - 2k$ [m]

Como en la estructura existen varias fuerzas. El momento producido con respecto al punto O será por cada una de ellas y el momento resultante la suma de ellas.

osea: $\vec{M_o} = \Sigma\ \vec{r_i} \times \vec{F_i}$

$$\vec{M_o} = \vec{r_A} \times \vec{F_1} + \vec{r_B} \times \vec{F_2} + \vec{r_C} \times \vec{F_3}$$

Expresando en forma de determinantes se tiene:

$$\vec{M_o} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 5 & 0 \\ -60 & 40 & 20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 5 & -2 \\ 30 & 40 & -30 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M_o} = (100i + 0j + 300k) + (0i + 0j + 0k) + (-70i - 40j - 240k)$$

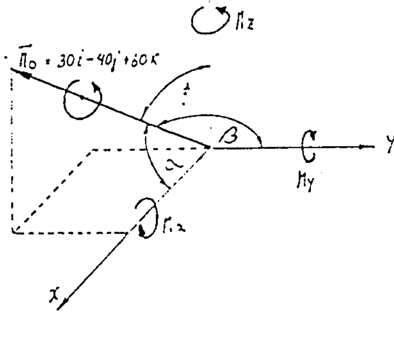
Por lo tanto: $\boxed{\vec{M_o} = 30i - 40j + 60k}$

b) Para hallar la dirección es necesario hallar los cosenos directores para lo cual necesitamos $\vec{M_u}$ momento unitario.

$$\vec{M_u} = \frac{\vec{M_o}}{|\vec{M_o}|} = \frac{30i - 40j + 60k}{\sqrt{30^2 + 40^2 + 60^2}} = \frac{3}{\sqrt{61}}i - \frac{4}{\sqrt{61}}j + \frac{6}{\sqrt{61}}k$$

ó también.- $\vec{M_u} = 0,384i - 0,512j + 0,768k$. [KN·m]

Donde los angulos directores serán:



$\cos\alpha = 0,384 \Rightarrow \alpha = 67,411°$

$\cos\beta = -0,512 \Rightarrow \beta = 120,807°$

$\cos\gamma = 0,768 \Rightarrow \gamma = 39,806°$

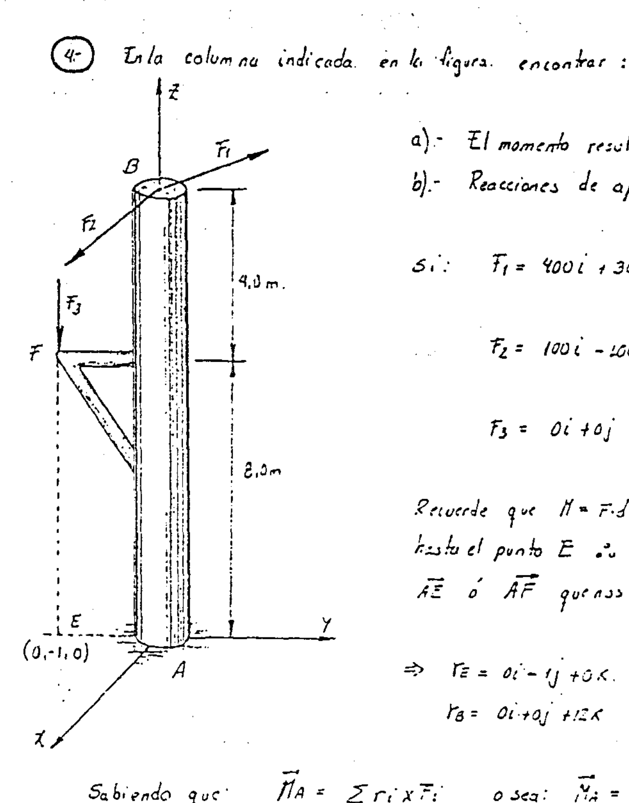
c) Los momentos de empotramiento serán:

$M_x = 30$ KN·m.

$M_y = -40$ KN·m.

$M_z = 60$ KN·m.

(4) En la columna indicada en la figura encontrar :



a).- El momento resultante con respecto al pto A.

b).- Reacciones de apoyo

si : $F_1 = 400i + 300j + 120K$ [KN]

$F_2 = 100i - 100j - 60K$ "

$F_3 = 0i + 0j - 500K$ "

Recuerde que $M = F \cdot d \Rightarrow F_3$ se puede proyectar hasta el punto E ∴ su vector posición puede ser $\vec{AE}$ ó $\vec{AF}$ que nos dará el mismo resultado.

$\Rightarrow r_E = 0i - 1j + 0K$

$r_B = 0i + 0j + 12K$

Sabiendo que: $\vec{M}_A = \sum r_i \times F_i$ o sea: $\vec{M}_A = \vec{r_E} \times \vec{F_3} + \vec{r_B} \times \vec{F_2} - \vec{r_B} \times \vec{F_1}$

o sea:

$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} i & j & K \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -500 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & K \\ 0 & 0 & 12 \\ 100 & -100 & -60 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & K \\ 0 & 0 & 12 \\ 400 & 300 & 120 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_A = (500i + 0j + 0K) + (1200i + 1200j + 0K) + (-3600i + 4800j + 0K)$$

$$\boxed{\vec{M}_A = -1900i + 6000j + 0{,}0K \quad [KN \cdot m]}$$

En cuanto a las reacciones R_x, R_y y R_z se tiene que se debe hacer: $\sum F = 0$

$$R_x i + R_y j + R_z K + \sum F_i + \sum F_j + \sum F_K = 0$$

$$(R_x i + R_y j + R_z K) + (400 + 100 + 0)i - (300 - 100 + 0)j + (120 - 60 - 500)K = \vec{0}$$

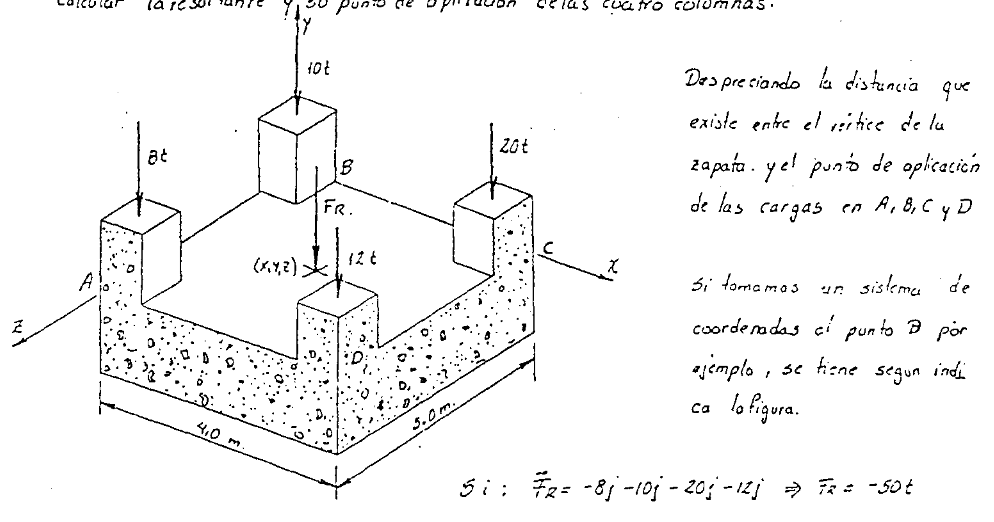
Por lo tanto:

$\Sigma F_x = 0$; $R_x + 400 + 100 = 0$ $\Rightarrow$ $R_x = -500$ [KN]

$\Sigma F_y = 0$; $R_y + 300 - 100 = 0$ $\Rightarrow$ $R_y = -200$ [KN]

$\Sigma F_z = 0$; $R_z + 120 - 60 - 500 = 0$ $\Rightarrow$ $R_z = 440$ [KN]

(5.-) Una losa de fundación de forma rectangular (Sin considerar su peso propio) de concreto armado, soporta cuatro columnas cuyos pesos van indicados en la figura. Calcular la resultante y su punto de aplicación de las cuatro columnas.



Despreciando la distancia que existe entre el vértice de la zapata. y el punto de aplicación de las cargas en A, B, C y D

Si tomamos un sistema de coordenadas el punto B por ejemplo, se tiene segun indica la figura.

Si : $\vec{F}_R = -8j - 10j - 20j - 12j \Rightarrow F_R = -50t$

Los vectores carga y sus vectores posición:

$$\vec{F_A} = -8j \Rightarrow \vec{r_A} = 5\vec{k}$$
$$\vec{F_B} = -10j \Rightarrow \vec{r_B} = 0$$
$$\vec{F_C} = -20j \Rightarrow \vec{r_C} = 4i$$
$$\vec{F_D} = -12j \Rightarrow \vec{r_D} = 4i + 0j + 5k.$$

$$\vec{M}_B = \vec{r_A} \times \vec{F_A} + \vec{r_C} \times \vec{F_C} + \vec{r_D} \times \vec{F_D}$$

o sea:

$$\vec{M}_B = 5\vec{k} \times (-8\vec{j}) + 4i \times (-20j) + (4i+5k) \times (-12j)$$

$$\vec{M}_B = -40\, \vec{k} \times \vec{j} + (-80)\, i \times j + (-48)\, i \times j + (-60)\, k \times j$$

Por definición sabemos que: $k \times j = -i$; $i \times j = \vec{k}$

$$\therefore \vec{M}_B = -40(-i) - 80k - 48(+k) - 60(-i) = 100\vec{i} - 128\vec{k}$$

Entonces $\boxed{\vec{M}_B = 100i - 128\vec{k}}$ ....(1)

Para calcular el punto de aplicación $\vec{r}_R(x, y, z)$ apliquemos lo sigte: $M_B = \vec{r}_R \times \vec{F}_R$

$$\vec{M}_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 0 & -50 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{M}_B = 50 \cdot z\, i + 0j - 50 \cdot x\, \vec{k}} \text{.........(2)}$$

Igualando (1) y (2) porque $\vec{M}_O = \vec{M}_B$

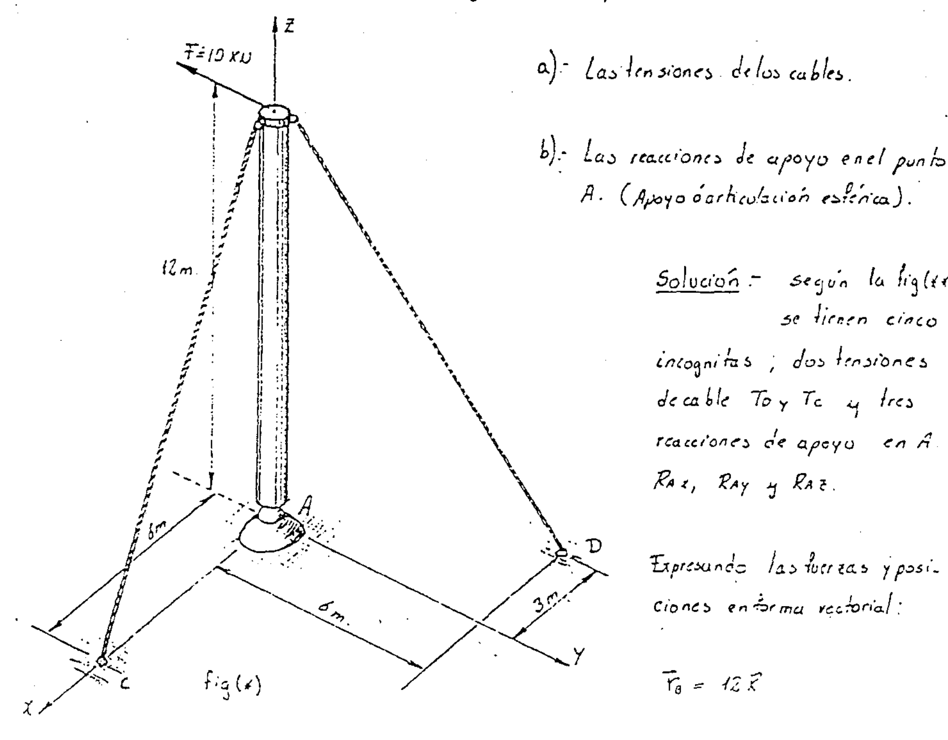
Entonces: $100i + 0j - 128k = 50z\, i + 0j - 50x \cdot k$

o sea:

$$\begin{cases} 50z = 100 & \Rightarrow z = 2 \quad [m] \\ 0 = 0 & \Rightarrow y = 0 \quad [m] \\ -50x = -128 & \Rightarrow x = 64/25 = 2{,}56 \; [m] \end{cases}$$

Por lo tanto $\boxed{F_R = -50j}$ actúa en: $\boxed{r_R = \frac{64}{25}i + 0j + 2k = (2{,}56; 0; 2)}$

(6:) El mastil de la figura con apoyo esférico en A, esta sujeto mediante 2 cables $\overline{CB}$ y $\overline{DB}$, en la parte superior actua una fuerza según se indica.; Calcular:



fig(*)

a).- Las tensiones de los cables.

b).- Las reacciones de apoyo en el punto A. (Apoyo ó articulación esférica).

Solución.- según la fig(**) se tienen cinco incognitas; dos tensiones de cable T_D y T_C y tres reacciones de apoyo en A R_{Ax}, R_{Ay} y R_{Az}.

Expresando las fuerzas y posiciones en forma vectorial:

$\vec{r}_B = 12\vec{k}$

Además: $\vec{F} = -10j$ [KN] ; $\vec{T}_D = T_D \cdot \vec{u}_D$; $\vec{T}_C = T_C \cdot \vec{u}_C$

$\vec{u}_D = (-3i + 6j + 12)/\sqrt{9+36+144} \Rightarrow \vec{u}_D = -0{,}218i + 0{,}436j + 0{,}873k$

$\vec{u}_C = (6i + 0j + 12k)/\sqrt{36+144} \Rightarrow \vec{u}_C = 0{,}447i + 0j - 0{,}894k$

$\Rightarrow \vec{T}_D = -0{,}218\,T_D i + 0{,}436\,T_D j - 0{,}873\,T_D k$

$\Rightarrow \vec{T}_C = 0{,}447\,T_C i - 0\,T_C j - 0{,}894\,T_C \vec{k}$

Z
10KN
B
T_C
T_D
12m
fig(**)
A
R_{Ax}
R_{Ay}
R_{Az}
X
Y

Además: $R_A = R_{Ax}i + R_{Ay}j + R_{Az}k$.

Por condición de equilibrio: $\sum F_i = 0$; $F + T_C + T_D + R_A = 0$

$$\Rightarrow \quad (-10j) + (0{,}447\,T_C\,i - 0{,}894\,T_C\,k) + (-0{,}218\,T_D\,i + 0{,}436\,T_D\,j - 0{,}873\,T_D\,k) + (R_{Ax}\,i + R_{Ay}\,j + R_{Az}\,k) = 0$$

$$(0{,}447\,T_C - 0{,}218\,T_D + R_{Ax})\,i + (-10 + 0{,}436\,T_D + R_{Ay})\,j + (R_{Az} - 0{,}894\,T_C - 0{,}873\,T_D)\,k = \vec{0}$$

Por lo tanto:

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad R_{Ax} + 0{,}447\,T_C - 0{,}218\,T_D = 0 \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad ; \quad R_{Ay} + 0{,}436\,T_D - 10 = 0 \qquad \ldots\ldots (2)$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad ; \quad R_{Az} - 0{,}894\,T_C - 0{,}873\,T_D = 0 \qquad \ldots\ldots (3)$$

Como podemos ver no se puede resolver el sistema. porque. tenemos 3 ec's y 5 incognitas.

Por lo tanto plantearemos otras ecuaciones, entonces haciendo momentos en A.

$$\Sigma M_A = 0 \quad ; \quad M_A = \vec{r}_G \times (F + T_C + T_D) = 0$$

$$\therefore \quad 12 \cdot k \times (-10j + 0{,}447\,T_C\,i - 0{,}894\,T_C\,k + (-0{,}218)\,T_D\,i + 0{,}436\,T_D\,j - 0{,}873\,T_D\,k)$$

$$-120\,k\times j + 5{,}364\,T_C\,k\times i - \cancel{10{,}728\,T_C\,k\times k} - 2{,}616\,T_D\,k\times i + 5{,}232\,T_D\,k\times j - \cancel{10{,}476\,T_D\,k\times k} = 0$$

Donde: $k\times j = -i \quad ; \quad k \times i = j \quad ; \quad k \times k = 0$

Entonces: $-120(-i) + 5{,}364\,T_C\,j - 2{,}616\,T_D\,j + 5{,}232\,T_D(-i) = 0$

$$(120 - 5{,}232\,T_D)\,i + (5{,}364\,T_C - 2{,}616\,T_D)\,j = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad ; \quad 5{,}232\,T_D - 120 = 0 \qquad \ldots\ldots (4)$$

$$5{,}364\,T_C - 2{,}616\,T_D = 0 \qquad \ldots\ldots (5)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1),(2),(3),(4) y (5)

$R_{Ax} = 0$ [KN]

$R_{Ay} = 0$ [KN]

$R_{Az} = 30,023$ [KN]

Resp. b).

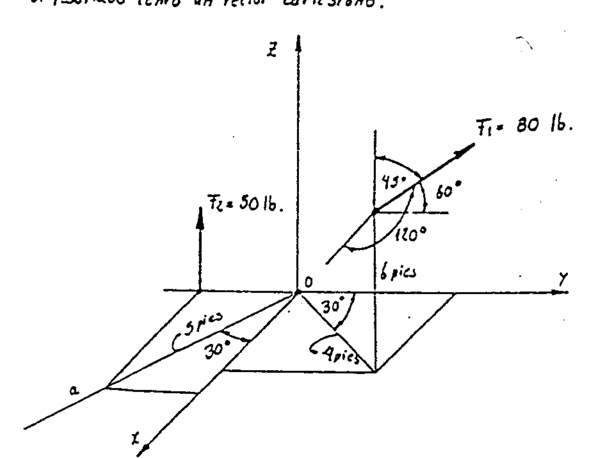
$T_C = 11,186$ [KN]

$T_D = 22,936$ [KN]

Resp. a)

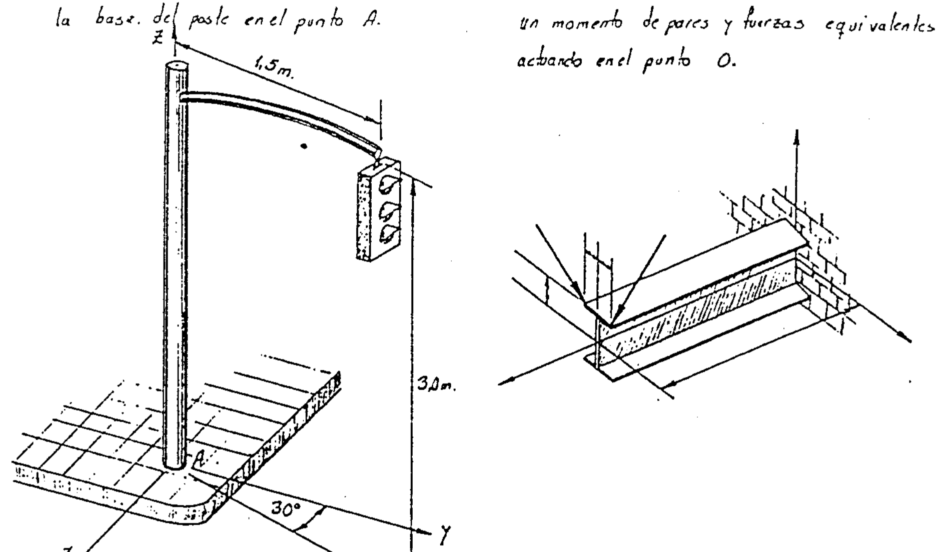
PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Determine el momento resultante de las dos fuerzas con respecto al eje Oa. Exprese el resultado como un vector cartesiano.

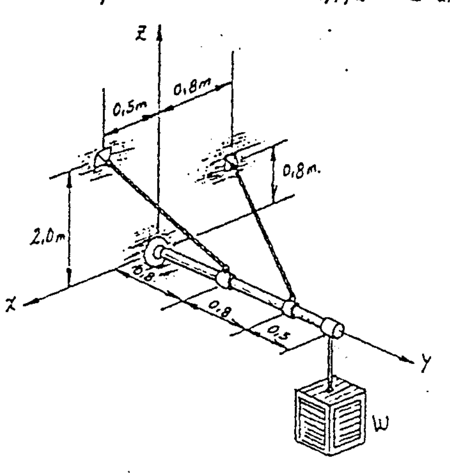


2.- El poste soporta un semáforo de 22 lb. Utilizando vectores determine el momento del peso de los semáforos con respecto a la base del poste en el punto A.

3.- Las fuerzas $F_1 = \{-4i + 2j - 3k\}$ KN y $F_2 = \{3i - 4j - 2k\}$ KN actúan sobre el extremo de la viga. Reemplace estas fuerzas por un momento de pares y fuerzas equivalentes actuando en el punto O.



4.- Los cables BC y DE pueden soportar una tensión máxima de 30 KN antes de que fallen. Determine el peso más grande W del cajón que puede suspenderse del extremo del anclaje. Tambien, determine las componentes de reacción X, Y, Z en la articulación esférica A.



5.- La placa de la figura está soportada por bisagras en A y B y por el cable CD. Las bisagras, propiamente alineados, no generan pares sobre la placa. y la bisagra en A no genera una fuerza sobre la placa. en la dirección del eje de la bisagra. Determine las reacciones en las bisagras y la tensión en el cable.

